



Catarina Lopes da Conceição Pacheco

Licenciada em Ciências da Engenharia e Gestão Industrial

**Determinação de Parâmetros das
Cartas de Controlo da Dispersão e
Desenvolvimento de *Software* de Apoio**

Dissertação para obtenção do Grau de Mestre em
Engenharia e Gestão Industrial

Orientador: Professor Doutor José Gomes Requeijo

Juri:

Presidente: Doutora Isabel do Nascimento Nunes, Professora
Associada com Agregação da Faculdade de Ciências e
Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa.

Vogais: Doutora Helena Maria Pereira Pinto Dourado e
Alvelos, Professora Auxiliar da Universidade de Aveiro /
Departamento de Economia, Gestão e Engenharia Industrial
da Universidade;

Doutor José Fernando Gomes Requeijo, Professor Auxiliar da
Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de
Lisboa.



FACULDADE DE
CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA

Setembro 2019

**Determinação de parâmetros das Cartas de Controlo da Dispersão e
Desenvolvimento de *Software* de Apoio.**

Copyright © Catarina Lopes da Conceição Pacheco, Faculdade de Ciências e Tecnologia,
Universidade Nova de Lisboa.

A Faculdade de Ciências e Tecnologia e a Universidade Nova de Lisboa têm o direito, perpétuo e sem limites geográficos, de arquivar e publicar esta dissertação através de exemplares impressos reproduzidos em papel ou de forma digital, ou por qualquer outro meio conhecido ou que venha a ser inventado, e de a divulgar através de repositórios científicos e de admitir a sua cópia e distribuição com objetivos educacionais ou de investigação, não comerciais, desde que seja dado crédito ao autor e editor.

Aos meus pais

AGRADECIMENTOS

A presente dissertação encerra uma longa viagem, de cinco anos, cheia de incertezas, tristezas, alegrias, dificuldades e muitos desafios. Este caminho não foi feito sozinha, pelo que contei com o apoio e a generosidade de alguns e quero expressar o quanto grata e feliz estou por terem estado ao meu lado.

Ao Professor Doutor José Gomes Requeijo, pelo professor, orientador e inspiração que é, pelo apoio, pela boa disposição e por ter acreditado mais na realização desta dissertação que eu mesma. Um professor que levo, com muito carinho, para a vida.

Ao Engenheiro João Nogueira pelo apoio, pelas tardes despendidas, pela paciência e disponibilidade para comigo. Sem ele não conseguiria concluir com sucesso esta etapa.

À Ana Lúcia Vilaça, ao Ricardo Nunes e ao Luís Brás pelo tempo despendido e pela ajuda na concretização da presente dissertação.

Ao Carlos Catarino, por caminhar ao meu lado, pela paciência e boa disposição durante a elaboração da presente dissertação.

Às minhas amigas Maria Leão, Marta Dinis e Luísa Amorim por terem sempre acreditado em mim. São um exemplo de força de vontade e dedicação. Verdadeiras inspirações. À Margarida Silva, por ter sido o meu braço direito na faculdade e uma grande amiga fora dela. Uma mente brilhante que tive o prazer de partilhar trabalhos, estudos, dúvidas e muitas risadas.

À minha família. Aos meus pais que depositaram em mim todos os sonhos do mundo. Que se sacrificaram e se sacrificam para me dar o melhor futuro possível e que sempre acreditaram nas minhas capacidades. Um grande beijinho cheio de amor.

A todos o meu sincero e profundo Obrigado!

RESUMO

O mundo é atualmente caracterizado pela globalização e pela competitividade do mercado onde os clientes são cada vez mais exigentes. Para colmatar esta exigência, é fundamental apostar na inovação e na melhoria contínua dos serviços prestados por parte das empresas.

O controlo estatístico do processo (*SPC*) é uma metodologia que contribui para a melhoria contínua dos processos, sendo as cartas de controlo as ferramentas do *SPC* mais importantes. As cartas de controlo, tanto as tradicionais como as especiais, são utilizadas para monitorizar tanto a média como a dispersão dos processos. Duas lacunas são tratadas acerca da implementação do *SPC*, tanto na aplicação das cartas de controlo tradicionais, como das cartas de controlo especiais.

Os princípios para o cálculo dos limites de controlo utilizados nas cartas de controlo tradicionais, ou de Shewhart, são baseados no pressuposto da Normalidade dos dados. No entanto, esse princípio é violado, no controlo da dispersão do processo, e os limites de controlo são ainda assim utilizados, o que prejudica a validade dos resultados. Um dos objetivos desta dissertação consiste em verificar a não-Normalidade das variáveis das cartas da dispersão e propor a utilização de uma nova carta, $\ln(S^2)$, proveniente de uma transformação logarítmica natural, com novos parâmetros de apoio à respetiva construção, obtidos através de simulação.

No que respeita às cartas de controlo especiais, verificaram-se algumas limitações na obtenção dos seus parâmetros. As cartas de controlo habitualmente designadas como “Cartas de Controlo Especiais”, as cartas das Somas Acumuladas (*CUSUM*) e as cartas de Média Móvel Exponencialmente Amortecida (*EWMA*) são contruídas tendo por base parâmetros obtidos através de ábacos e tabelas desenvolvidos por vários autores, no entanto, apenas apresentam parâmetros para as situações mais comuns e com pouca precisão, pelo que se tornou pertinente disponibilizar esses parâmetros a nível informático de modo a obter uma melhor gama. Será analisada a carta de controlo $CUSUM-\ln(S^2)$ para controlo da dispersão do processo para amostras de dimensão igual a 4, 5, 6, 7 e 8.

Outro aspeto tratado na presente dissertação é a atualização e a extensão do *software* criado por Nogueira (2018) que contempla todos os parâmetros calculados até então, assim como os novos parâmetros calculados com a presente dissertação, tanto a nível das cartas tradicionais como das cartas especiais. O trabalho desenvolvido nesta dissertação incide no âmbito do Controlo Estatístico do Processo (*SPC*) visando contribuir para o aumento da gama de dados disponível para consulta.

Palavras-chave: Controlo Estatístico do Processo, Cartas de Controlo Tradicionais, Cartas de Controlo Especiais, $CUSUM-\ln(S^2)$, Simulação, $\ln(S^2)$.

ABSTRACT

We are facing a globalized and competitive world full of demanding clients. In order to fill this requirement, it's very important for companies to innovate and improve continuously their production and services.

The Statistical Process Control (*SPC*) is a methodology that uses a huge quality tools where is possible to verify the process stability, where the control charts are the most monitoring tools. They monotonize not only the process average but also the process dispersion. In this master thesis, two gaps in the literature will be addressed about the control charts, one for traditional control charts and other for special control charts.

The traditional control charts are based on data assumption of Normality. When controlling the process standard deviation, the normality assumption is broken, and the control limits are used, which harms the validity of results. To fill the problem, it's proposed a natural logarithmic transformation, giving rise to a new control chart $\ln(S^2)$ with new constant values in order to help their construction.

Related to special control charts, there are some restraints when obtaining their parameters. The special control charts, such as *CUSUM* (Cumulative Sum) and *EWMA* (Exponentially Weighted Moving Average), are based on parameters for their construction obtained from some abacuses and tables developed by several authors, however, theses parameters only cover the most common situations. It became interesting obtaining the parameters and provide them at computer level, in order to obtain a large range of values. Therefore, the parameters form chart *CUSUM- $\ln(S^2)$* for sample's dimension of 4, 5, 6, 7 and 8, for dispersion control, are obtained informatically, giving continuation to Nogueira's (2018) study.

Lastly, the *software* created by Nogueira (2018) was updated and extended which contemplates all the previous calculated parameters and the new ones from traditional and special control charts. The developed work is very important in the scope of Statistical Process Control (*SPC*) because it increases the range of data available for consultation.

Keyword: Statistical Process Control, Traditional Control Charts, Special Control Charts, *CUSUM- $\ln(S^2)$* , Simulation, $\ln(S^2)$.

ÍNDICE

1	INTRODUÇÃO.....	1
1.1	MOTIVAÇÃO.....	1
1.2	OBJETIVOS	2
1.3	METODOLOGIA DE INVESTIGAÇÃO.....	2
1.4	ESTRUTURA DA DISSERTAÇÃO	4
2	CONTROLO ESTATÍSTICO DO PROCESSO (SPC).....	5
2.1	CONTEXTO HISTÓRICO.....	5
2.2	PROCESSO	5
2.2.1	CONTROLO DO PROCESSO.....	6
2.2.2	CONTROLO ESTATÍSTICO DO PROCESSO	7
2.3	CARTAS DE CONTROLO TRADICIONAIS	8
2.3.1	PREPARAÇÃO PARA A UTILIZAÇÃO DAS CARTAS DE CONTROLO TRADICIONAIS	8
2.3.2	PRINCÍPIO DAS CARTAS DE CONTROLO	9
2.3.3	REGRAS PARA DETEÇÃO DE CAUSAS ESPECIAIS	10
2.3.4	TIPOS DE CARTAS DE CONTROLO	11
2.3.5	CONSTRUÇÃO DAS CARTAS DE CONTROLO	12
2.3.6	INDICADORES DE DESEMPENHO	14
2.3.7	CAPACIDADE DO PROCESSO	15
2.3.8	CONDIÇÕES DE UTILIZAÇÃO	18
2.3.9	VANTAGENS.....	18
2.3.10	DESVANTAGENS.....	19
2.4	CARTAS DE CONTROLO ESPECIAIS	19
2.4.1	CARTA CUSUM PARA CONTROLO DA MÉDIA DO PROCESSO	20
2.4.2	CARTA CUSUM PARA CONTROLO DA DISPERSÃO DO PROCESSO	22
2.4.3	PARÂMETROS DAS CARTAS CUSUM	25
2.4.4	ARL PARA AS CARTAS CUSUM	25
3	NOVA CARTA $\overline{LN}(S^2)$ E CÁLCULO DOS SEUS PARÂMETROS	29
3.1	NÃO-NORMALIDADE DAS CARTAS R E S	29
3.1.1	CARTA R	29
3.1.2	CARTA S	30
3.2	CARTA \overline{X} e $\overline{LN}(S^2)$	31
3.2.1	LIMITES DE CONTROLO	32
3.2.2	CONSTANTES	35
3.2.3	ESTUDO COMPARATIVO	35

4	MATLAB PARA DETERMINAÇÃO DE PARÂMETROS DA CARTA DE CONTROLO	
	CUSUM-LN(S^2)	37
4.1	CARTA CUSUM-LN(S^2)	38
4.1.1	Metodologia da Fase 1	39
4.1.2	Metodologia da Fase 2	42
4.1.3	Metodologia da Fase 3	44
4.2	RESULTADOS	45
4.2.1	RESULTADOS FASE 2	47
4.2.2	RESULTADOS FASE 3	54
5	SOFTWARE DE APOIO À IMPLEMENTAÇÃO DAS CARTAS DE CONTROLO	61
5.1	ECLIPSE E SCENE BUILDER	61
5.1.1	ECLIPSE	61
5.1.2	SCENE BUILDER	63
5.2	MODIFICAÇÕES NO SOFTWARE	63
5.2.1	NOME	63
5.2.2	DISPLAY E DESIGN	63
5.2.3	NOVO BOTÃO PARA A CARTA LN(S^2)	65
6	CONCLUSÕES E SUGESTÕES DE MELHORIA	67
6.1	CONCLUSÕES GERAIS	67
6.2	SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS	68
	BIBLIOGRAFIA	69
	ANEXOS	71
	ANEXO A - Coeficientes das cartas Tradicionais de Variáveis	71
	ANEXO B - Ábacos de Referência das cartas CUSUM para controlo da dispersão	72

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 2.1: Representação esquemática de um processo	6
Figura 2.2: Representação de uma carta de controlo	9
Figura 2.3: Regras de deteção de causas especiais	11
Figura 2.4: Exemplo associado ao valor de C_p	16
Figura 3.1: Modo de obtenção dos parâmetros G_3 e G_4	33
Figura 4.1: Fluxograma da Fase 1	40
Figura 4.2: Lógica associada ao algoritmo	41
Figura 4.3: Fluxograma da Fase 2	43
Figura 4.4: Método das aproximações sucessivas	44
Figura 4.5: Fluxograma da Fase 3	46
Figura 4.6: Combinações de h_c e k_c para valores de ARL_{EC} quando $n = 4$	49
Figura 4.7: Combinações de h_c e k_c para valores de ARL_{EC} quando $n = 5$	50
Figura 4.8: Combinações de h_c e k_c para valores de ARL_{EC} quando $n = 6$	51
Figura 4.9: Combinações de h_c e k_c para valores de ARL_{EC} quando $n = 7$	52
Figura 4.10: Combinações de h_c e k_c para valores de ARL_{EC} quando $n = 8$	53
Figura 4.11: Combinação de k_c com δ_c para $n = 8$	54
Figura 5.1: Raciocínio relativo ao padrão de arquitetura MVC	62
Figura 5.2: Autenticação e menu principal no <i>software FCC</i>	64
Figura 5.3: Cartas de Controlo Tradicionais e teste de K-S no <i>software FCC</i>	64
Figura 5.4: Cartas de Controlo Especiais para Controlo da Média e Dispersão no <i>software FCC</i>	64
Figura 5.5: Novo botão do separador "Cartas de Controlo Tradicionais" no <i>software FCC</i>	65

ÍNDICE DE TABELAS

Tabela 2.1: Tipos de cartas de controlo	11
Tabela 2.2: Resumo dos limites das cartas para controlo de variáveis para parâmetros do processo não conhecidos.....	13
Tabela 2.3: Estimação dos parâmetros do processo.....	13
Tabela 2.4: Resumo dos limites das cartas para controlo de variáveis para parâmetros do processo conhecidos.....	14
Tabela 3.1: Histogramas resultante da simulação em <i>Matlab</i> para a estatística R	30
Tabela 3.2: Histogramas resultantes da simulação em <i>Matlab</i> para a estatística S	31
Tabela 3.3: Constantes	35
Tabela 3.4: Comparação dos histogramas entre as estatísticas R , S e $\ln(S^2)$	36
Tabela 4.1: Output em <i>Excel</i> representativo da Fase 1.....	39
Tabela 4.2: Output em <i>Excel</i> representativo da Fase 2.....	42
Tabela 4.3: Output em <i>Excel</i> representativo da Fase 3.....	44
Tabela 4.4: Resultados da Fase 3 para $n = 4$	55
Tabela 4.5: Resultados da Fase 3 para $n = 5$	56
Tabela 4.6: Resultados da Fase 3 para $n = 6$	57
Tabela 4.7: Resultados da Fase 3 para $n = 7$	58
Tabela 4.8: Resultados da Fase 3 para $n = 8$	59
Tabela A.1: Fatores das cartas de controlo de variáveis.....	71
Tabela B.1: Parâmetros (k_C, h_C) , ARL_1 e ARL_2 da carta $CUSUM-\ln(S^2)$, para detetar um aumento da variância do processo.....	72
Tabela B.2: Parâmetros (k_C, h_C) , ARL_1 e ARL_2 da carta $CUSUM-\ln(S^2)$, para detetar um decréscimo da variância do processo.....	73

SIMBOLOGIA E NOTAÇÕES

A, A_2, A_3	Fatores para construção das cartas de controlo de variáveis para a Carta da Média.
ARL	<i>Average Run Length</i> , número médio de observações até a carta sinalizar um ponto fora de controlo.
$ARL_{Em\ Controlo}$	Número médio de observações até a carta sinalizar um ponto fora de controlo, quando o processo está em controlo.
ARL_{EC}	Versão mais curta de $ARL_{Em\ Controlo}$.
ARL_{FC}	Versão mais curta de $ARL_{Fora\ de\ Controlo}$.
$ARL_{Fora\ de\ Controlo}$	Número médio de observações até a carta sinalizar um ponto fora de controlo, quando o processo já não está em controlo.
ARL_{inf}	ARL simulado produzido, que limita inferiormente ARL_{EC} , no processo iterativo da na Fase 2 do Algoritmo.
$ARL_{EC\ Simulado}$	ARL simulado resultante da Fase 1.
ARL_{sup}	ARL simulado produzido, que limita superiormente ARL_{EC} , no processo iterativo da na Fase 2 do Algoritmo.
B_3, B_4, B_5, B_6	Fatores para construção das cartas de controlo de variáveis para a Carta do Desvio Padrão.
CCE	Software criado por Nogueira (2018).
C_t	Variável de controlo no instante t que visa detetar um aumento na variância/média do processo.
c_1, c_2	Fatores para a construção da carta de controlo \bar{X} e $\ln(S^2)$.
c_4	Fator para a construção das cartas de controlo de variáveis.
C_p	Índice de capacidade potencial do processo.
C_{pk}	Índice de capacidade do processo.
C_{pm}	Índice de capacidade potencial corrigido pelo desvio da média em relação ao valor nominal.
C_{pmk}	Índice de capacidade corrigido pelo desvio da média em relação ao valor nominal.
$CUSUM$	Carta <i>Cumulative Sums</i> (ou Somas Acumuladas), para o controlo da média.
$CUSUM-FIR$	Variante das cartas $CUSUM$ com objetivo aumentar a sensibilidade da carta no início da análise do processo ($FIR = Fast\ Initial\ Response$).

$CUSUM-In(S^2)$	Carta <i>CUSUM</i> para o controlo da dispersão.
d_2	Fatores para construção das cartas de controlo de variáveis.
$D_{crítico}$	Valor crítico para o teste <i>Kolmogorov-Smirnov</i> .
D_1, D_2, D_3, D_4	Fatores para construção das cartas de controlo de variáveis para a Carta da Amplitude.
D_t	Variável de controlo no instante t que visa detetar um decréscimo na variância/média do processo.
<i>Eclipse</i>	Plataforma usada para desenvolver o <i>software</i> .
<i>Excel</i>	<i>Software</i> de folha de cálculo utilizado na presente dissertação.
<i>EWMA</i>	Carta <i>Exponentially Weighted Moving Average</i> (ou Média Móvel Exponencialmente Amortecida) para o controlo da média.
<i>FCC</i>	Nome do <i>software</i> atualizado na presente dissertação.
<i>FCT</i>	Faculdade de Ciências e Tecnologia.
<i>FIR</i>	<i>Fast Initial Response</i> .
$FIRCUSUM-In(S^2)$	Variante das cartas $CUSUM-In(S^2)$ com objetivo aumentar a sensibilidade da carta no início da análise do processo.
<i>Gluon</i>	Empresa detentora da plataforma <i>Scene Builder</i> .
<i>GUI</i>	Interface gráfica da linguagem Java (<i>Graphical User Interface</i>).
G_1, G_2, G_3, G_4	Fatores para construção da carta $In(S^2)$.
h	Limite de controlo das cartas <i>CUSUM</i> .
h_C	Limite de controlo das cartas <i>EWMA</i> e <i>CUSUM</i> para a deteção de aumentos na dispersão.
h_D	Limite de controlo das cartas <i>EWMA</i> e <i>CUSUM</i> para a deteção de decréscimos na dispersão.
h_{inf}	h que produz ARL_{inf} .
$h_{médio}$	h utilizado para a nova iteração, resultante da média entre h_{sup} e h_{inf} .
$h_{méd}$	Versão mais curta de $h_{médio}$.
h_{sup}	h que produz ARL_{sup} .
<i>IBM</i>	Empresa criadora do <i>software Eclipse</i> (<i>International Business Machines Corporation</i>).
<i>Java</i>	Linguagem utilizada no desenvolvimento do <i>software</i> .
k	Parâmetro de referência das cartas <i>CUSUM</i> .

k_C	Parâmetro de referência das cartas <i>CUSUM</i> para a deteção de aumentos na dispersão.
k_D	Parâmetro de referência das cartas <i>CUSUM</i> para a deteção de decréscimos na dispersão.
LC	Limite Central.
LIC	Limite Inferior de Controlo.
LIE	Limite Inferior de Especificação.
LSC	Limite Superior de Controlo.
LSE	Limite Superior de Especificação.
m	Número de amostras.
<i>Matlab</i>	<i>Software</i> utilizado para realização das simulações.
MR	Amplitudes Móveis.
MVC	Padrão de arquitetura de <i>software</i> (<i>Model View Controller</i>).
n	Dimensão da amostra.
$N(0,1)$	Distribuição normal com média igual a 0 e variância igual a 1.
<i>Oracle</i>	Empresa de <i>software</i> que possui a plataforma <i>Eclipse</i> .
R	Amplitude amostral.
R^2	Coeficiente de determinação.
\bar{R}	Média de amplitudes de amostras.
$RL_{EC} \text{ Simulado}$	Número de pontos até a carta sinalizar um ponto fora de controlo.
$RL_{FC} \text{ Simulado}$	Número de pontos até a carta sinalizar um ponto fora de controlo.
S	Desvio padrão amostral.
\bar{S}^2	Média das variâncias das amostras.
S^2	Variância amostral.
<i>Scene Builder</i>	Plataforma usada para desenvolver o aspeto gráfico do <i>software</i> .
SPC	Controlo Estatístico do processo (<i>Statistical Process Control</i>)
t	Tempo.
T	Valor nominal da característica.
T_t	Soma acumulada, no instante t , para detetar um decréscimo do parâmetro em estudo.
<i>UNL</i>	Universidade Nova de Lisboa.

Y_t	Transformação logarítmica da variância.
\bar{X}	Média.
X	Mediana.
Z_t	Variável Normal reduzida referente a \bar{X}_t .
$Z_{\alpha/2}$	Valor crítico da Normal reduzida.
α	Risco do tipo 1; nível de significância; risco do produtor.
β	Risco do tipo 2; risco do consumidor.
ω	Característica da qualidade a controlar.
δ	Alteração padronizada na média ou dispersão.
δ_C	Alteração padronizada quando se faz aumentar o desvio padrão do processo.
δ_D	Alteração padronizada quando se faz diminuir o desvio padrão do processo.
Δ	Alteração no valor nominal da média.
ε	Erro tolerável na Fase 2.
μ	Média da população.
μ	Média da população estimada.
σ	Desvio padrão da população.
σ_0	Desvio padrão do processo no instante inicial.
σ_1	Desvio padrão do processo após ocorrer uma alteração.
σ	Desvio padrão da população estimado.
σ^2	Variância da população.
$\sigma_{\bar{X}}$	Desvio padrão da média.

1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo apresenta-se a motivação, os objetivos, a metodologia adotada e a estrutura da presente dissertação.

1.1 MOTIVAÇÃO

O Controlo Estatístico do processo (*SPC*) concilia várias ferramentas, ferramentas essas que fornecem informações acerca dos processos produtivos, facilitando a tomada de decisão com elevado grau de fiabilidade e confiança. Estas ferramentas têm como principal objetivo a monitorização e redução da variabilidade de forma a evitar (ou minimizar) a produção de unidades não conformes.

As cartas de controlo, tanto as tradicionais como as especiais, são uma ferramenta fundamental no *SPC*, permitindo a deteção de alterações dos parâmetros do processo produtivo e, por sua vez, melhorá-lo.

As cartas de controlo estatístico tradicionais, desenvolvidas por Walter Shewhart, baseiam-se na existência de dados independentes e identicamente distribuídos segundo uma distribuição Normal. Estes pressupostos são muito importantes para a validação dos resultados. Ao analisar as cartas relativas ao controlo da média do processo (carta \bar{X}), o pressuposto de Normalidade é verificado, no entanto, quando da análise das cartas destinadas ao controlo da dispersão do processo (cartas *R* e *S*), a Normalidade é violada. Mesmo assim, tais cartas são utilizadas com este pressuposto (ainda que violado), o que, de certa forma, prejudica a análise dos resultados pois não são uma aproximação à realidade. Torna-se assim pertinente dar atenção a esta questão e investigar a possibilidade de desenvolver uma nova técnica que permita ultrapassar a referida contingência.

Nas cartas de controlo especiais é necessário obter certos parâmetros de modo a aplicar corretamente o controlo estatístico do processo. No entanto, esses parâmetros são disponibilizados em ábacos ou tabelas, apresentando apenas um grupo restrito de dados e pouca precisão, facto que limita a sua utilização. Ao longo dos últimos anos, o estudo desses parâmetros tem sido desenvolvido a nível informático, designadamente, por estudantes de Engenharia e Gestão Industrial da FCT/UNL para possam ser mais precisos e abrangentes e assim poder ser otimizada a sua utilização em contextos industriais, educativos e de investigação. Continua, no entanto, a detetar-se alguns erros na carta *CUSUM-In(S²)* para uma

certa gama de valores, tornando-se pertinente estudar os seus parâmetros a nível informático de modo a tornar a gama de dados mais fiável para utilização académica e industrial.

1.2 OBJETIVOS

Com esta dissertação pretende-se, com apoio do *software Matlab*, melhorar o controlo estatístico do processo (*SPC*) de duas formas distintas: (i) com a determinação dos parâmetros das cartas *CUSUM- $\ln(S^2)$* e (ii) com o desenvolvimento de uma nova técnica estatística, em alternativa às cartas *R* e *S*, a carta *$\ln(S^2)$* .

No âmbito das cartas de controlo de Shewhart, incidir-se-á no seu estudo da Normalidade para o controlo da dispersão, usando o *software Matlab*, e, bem assim, na proposta de uma nova carta *$\ln(S^2)$* proveniente de uma transformação de dados.

No que se refere às cartas de controlo especiais, esta dissertação incide na determinação dos parâmetros da carta *CUSUM- $\ln(S^2)$* , para dimensão de amostras 4, 5, 6, 7 e 8, melhorando a gama de dados disponíveis para consulta. Serão desenvolvidos algoritmos em linguagem *Matlab*, concebidos para construir os respetivos ábacos e tabelas inerentes à carta de controlo em estudo, através de simulação computacional.

De modo a conjugar estas duas abordagens, é atualizado o *software* desenvolvido por Nogueira (2018) que engloba todos os parâmetros obtidos, tanto das cartas de controlo especiais como os limites de controlo das cartas de controlo de Shewhart, em particular as constantes para a construção de carta *$\ln(S^2)$* , para a Fase 1 e 2.

Pretende-se também que este trabalho contribua para aprofundar o estudo de técnicas de simulação adequadas a problemas de controlo estatístico dos processos produtivos e que, de certa forma, agilizem a implementação da carta *CUSUM- $\ln(S^2)$* e da carta *$\ln(S^2)$* em contexto industrial e académico.

1.3 METODOLOGIA DE INVESTIGAÇÃO

É imprescindível possuir uma estratégia definida, porém flexível a ligeiras mudanças, para o desenvolvimento da presente dissertação. Foram definidas diversas fases que permitiram um avanço gradual e que são apresentadas de seguida.

1. Revisão Bibliográfica

Para dar início ao estudo é essencial realizar uma análise prévia dos desenvolvimentos já realizados na área do *SPC*. Consiste na análise e

sintetização da literatura disponível, em particular das metodologias e ferramentas sobre as cartas de controlo abordadas neste estudo que possam vir a contribuir para o avanço da presente dissertação. Foram desenvolvidos, baseados na literatura, as ferramentas que apoiam a construção da nova carta desenvolvida $\ln(S^2)$.

2. Obtenção de parâmetros

a. Estudo da Normalidade e simulação dos limites de controlo da carta $\ln(S^2)$

O *Matlab* é usado para estudar visualmente a Normalidade das cartas de controlo de Shewhart, para controlo da dispersão, bem como para simular os limites de controlo da carta $\ln(S^2)$ para amostras de dimensão de 2 a 25.

b. Simulação e determinação dos parâmetros da carta $CUSUM-\ln(S^2)$

É aplicada uma ferramenta computacional (*Matlab*), composta por três fases distintas, de modo a obter os parâmetros da carta em questão para as dimensões de amostras selecionadas.

3. Tratamento dos resultados

a. Para a nova carta $\ln(S^2)$

Após simulação dos limites de controlo, é necessário tratá-los de modo a obter uma tabela com todos os parâmetros necessários para a construção da carta $\ln(S^2)$.

b. Para a carta $CUSUM-\ln(S^2)$

Após a obtenção dos seus parâmetros, é necessário o seu tratamento. São obtidos regressões, ábacos e tabelas com dois objetivos: (i) serem comparadas com a literatura, de modo a validarem os resultados, e (ii) contemplarem o *software* posteriormente desenvolvido.

4. Atualização e extensão do Software desenvolvido por Nogueira (2018)

É atualizado o *software* com os novos parâmetros provenientes da simulação em 3.b é criado um novo módulo que contempla a nova carta desenvolvida em 3.a. Algumas modificações foram feitas por razões de melhoria da sua componente visual enquanto outras resultaram da necessidade técnica do desenvolvimento do *software*.

1.4 ESTRUTURA DA DISSERTAÇÃO

Apresentam-se, resumidamente, os assuntos dos seis principais capítulos que constituem esta dissertação.

Capítulo 1 - Introdução: É explicado a motivação da realização desta dissertação, os seus objetivos e a sua contribuição para a melhoria do Controlo Estatístico do Processo (SPC), a metodologia adotada e a estrutura do presente documento.

Capítulo 2 - Abordagem ao Controlo Estatístico do Processo (SPC): A revisão da literatura relacionada com o Controlo Estatístico do Processo encontra-se neste capítulo. Dispõe de uma breve evolução histórica seguindo-se dos principais conceitos teóricos e metodologias essenciais para o desenvolvimento das cartas de controlo, abordando tanto os conceitos das cartas de controlo tradicionais como das cartas de controlo especiais.

Capítulo 3 - *Matlab* para cálculo de novos limites de controlo da nova carta de controlo $\ln(S^2)$: Neste capítulo é apresentada uma nova técnica, carta $\ln(S^2)$, proveniente de uma transformação logarítmica natural da variância amostral, de modo a melhorar o controlo estatístico da dispersão do processo. São apresentadas novas constantes que permitem o cálculo dos limites de controlo que farão parte do *software* desenvolvido posteriormente.

Capítulo 4 - *Matlab* para determinação de parâmetros de cartas de controlo: São apresentadas as metodologias associadas a cada algoritmo, um para cada fase, para o cálculo dos parâmetros da carta $CUSUM-\ln(S^2)$. Em cada algoritmo serão apresentados os respetivos *inputs* e *outputs*. No final do capítulo são apresentados os resultados finais das simulações bem como os seus respetivos ábacos com as respetivas regressões polinomiais aplicadas, para que possam fazer parte do *software* desenvolvido.

Capítulo 5 - *Software* de apoio à implementação das cartas de controlo: Este capítulo contém a descrição das plataformas utilizadas bem como todos os módulos do *software* desenvolvido que sofreram alterações.

Capítulo 6 - Conclusões e sugestões para trabalhos futuros: Para finalizar, é feita uma breve conclusão de todo o trabalho e algumas melhorias são sugeridas para trabalhos futuros com o objetivo de despertar o interesse pelo Controlo Estatístico do Processo.

2 CONTROLO ESTATÍSTICO DO PROCESSO (*SPC*)

Este capítulo é fundamental para a compreensão do trabalho desenvolvido desde logo por abordar os conceitos teóricos sobre o Controlo Estatístico do Processo (*SPC*). Inicia-se com uma breve contextualização histórica da qualidade, seguindo-se dos conceitos de controlo estatístico, abordando as cartas de controlo tradicionais e as cartas de controlo especiais.

2.1 CONTEXTO HISTÓRICO

Qualidade é um conceito intrínseco ao ser humano, desde os tempos mais remotos que há uma preocupação com a qualidade. No entanto, quando se trata do Controlo Estatístico do Processo (*SPC*), pensa-se que a sua origem poderá ter sido no início da década de 1920, quando Walter Shewhart, um físico, engenheiro, professor, consultor e estatístico, propôs o uso da Carta de Controlo aos seus superiores na empresa Bell Telephones onde trabalhava (António et al., 2019). Apesar de, à data, não ter o impacto esperado, hoje em dia, as cartas de controlo são utilizadas sobretudo pela sua simplicidade de aplicação e eficiência.

Pouco tempo depois, aquando da Segunda Guerra Mundial, a preocupação com a fabricação dos produtos exigiu uma melhor gestão da qualidade e a obtenção de novos métodos para garantir que os produtos fabricados seriam semelhantes entre si e sem defeitos (Bisgaard, 2007).

No pós-Guerra, os derrotados japoneses decidiram investir no setor industrial. Deming, discípulo de Shewhart, a pedido do Japão, prestou consultoria divulgando os conceitos de melhoria contínua e Controlo Estatístico do Processo (*SPC*), visando a importância do pensamento estatístico na resolução dos problemas produtivos de modo a evitar que os defeitos ocorressem ao invés de eliminar os produtos defeituosos (Tsutsui, 1996).

Desde então, graças aos “Gurus” da Qualidade e seus discípulos, o controlo estatístico de processos (*SPC*) tem sido utilizado para monitorizar e melhorar a qualidade e a produtividade dos processos produtivos, tendo ganho uma nova perspetiva com foco na prevenção e no cliente.

2.2 PROCESSO

Um processo é constituído por um conjunto de atividades que transformam entradas em saídas. É a saída do processo que se pretende controlar, devendo satisfazer os requisitos estabelecidos

numa fase inicial. No entanto existem fontes de variação que afetam os processos produtivos, geralmente devidas a seis fatores (Pereira & Requeijo, 2012):

- Equipamento
- Matéria-prima
- Mão-de-obra
- Meio ambiente
- Métodos
- Metrologia

Um processo possui variáveis controláveis e não controláveis e ambas têm de ser tidas em consideração. As variáveis controláveis, como o nome indica, podem ser controladas pelo utilizador enquanto as não controláveis são independentes do utilizador (v.g. temperatura, humidade, vento, etc.). Na Figura 2.1 é possível observar um esquema representativo do processo.

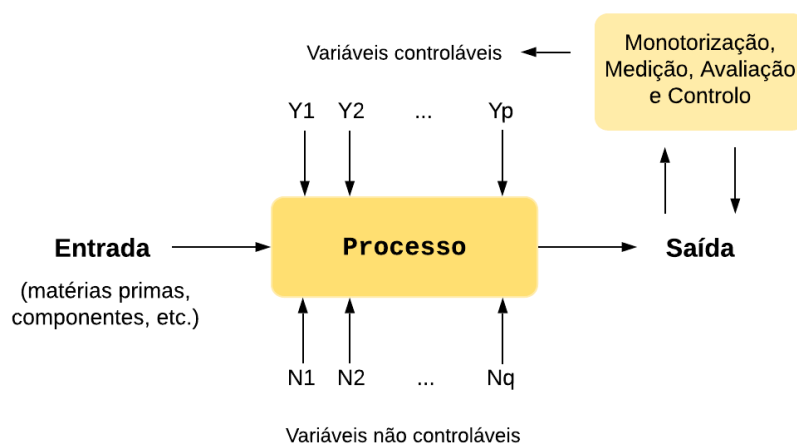


Figura 2.1: Representação esquemática de um processo (Adaptado de Pereira e Requeijo, 2012)

2.2.1 CONTROLO DO PROCESSO

Qualquer produto deve ser produzido de acordo com o que foi pré-estabelecido, tendo de estar inserido num processo estável, que produza de acordo com as especificações pré-definidas e com pouca variabilidade.

Ao longo do Século XX, foram desenvolvidas várias ferramentas, com o nome de Ferramentas da Qualidade, com o intuito de verificar a estabilidade do processo e permitir uma melhoria contínua do seu desempenho. Cada ferramenta tem uma finalidade distinta pelo que pode ser aplicada mais do que uma ferramenta aquando da resolução de um determinado problema.

Estas ferramentas adaptam-se a qualquer processo, são muito simples de utilizar, e, quando aliadas à gestão, tornam-se ferramentas muito poderosas que garantem o aumento de produtividade nas empresas, indo ao encontro dos seus objetivos (Pereira & Requeijo, 2012).

As sete Ferramentas Básicas da Qualidade são:

- Fluxograma
- Folha de Registo e Verificação
- Histograma
- Diagrama de Dispersão
- Diagrama de Causa-e-Efeito
- Diagrama de Pareto
- Cartas de Controlo

2.2.2 *CONTROLO ESTATÍSTICO DO PROCESSO*

A Estatística tem um papel fundamental no controlo dos processos, pois para além de avaliar de forma objetiva as características de um determinado produto, possui uma linguagem universal de comunicação. Visa controlar as variações que ocorrem nos processos, identificando as causas que as originam. As variações que ocorrem num determinado processo produtivo são originadas por dois tipos de causas: (i) as causas comuns de variação e (ii) as causas especiais de variação.

As causas comuns de variação são inerentes à natureza do processo e não podem ser alteradas sem alterar o seu próprio processo, são aleatórias e podem ser descritas por distribuições de probabilidade. Quando um processo está apenas sujeito a causas comuns de variação, encontra-se sob controlo estatístico, no entanto, é necessário minimizá-las. Para minimizar as causas comuns de variação é necessária a intervenção da gestão sobre as alterações necessárias a introduzir no processo, tais como mudança de fornecedores, equipamento, ou mesmo dos métodos de trabalho.

Já as causas especiais de variação são esporádicas e imprevisíveis. Sendo detetada uma causa especial de variação diz-se que o processo está fora de controlo estatístico pois a característica da qualidade a ser estudada apresenta variações não aceitáveis e, caso não seja devidamente

eliminada, pode, mais tarde, vir a tornar o processo instável, prejudicando o produto final (Pereira & Requeijo, 2012).

2.3 CARTAS DE CONTROLO TRADICIONAIS

Com o intuito de controlar e monitorizar os processos, são utilizadas várias ferramentas que apoiam o Controlo da Qualidade, entre elas as cartas de controlo, em particular as tradicionais.

Uma carta de controlo tradicional (ou de Shewhart) é um gráfico que acompanha a variabilidade de um processo ao longo do tempo, auxiliando na identificação de causas comuns e especiais de variação. Permite verificar se o processo está sob controlo estatístico e certificar que o mesmo permanece estatisticamente em controlo ao longo do tempo (Pereira & Requeijo, 2012).

2.3.1 *PREPARAÇÃO PARA A UTILIZAÇÃO DAS CARTAS DE CONTROLO TRADICIONAIS*

Para as cartas de controlo serem devidamente implementadas, alguns aspetos têm de ser tidos em consideração, em especial (Pereira & Requeijo, 2012):

- Formar os participantes acerca do processo:

Os participantes devem compreender as vantagens da implementação das cartas de controlo, saber utilizá-las e interpretá-las corretamente.

- Definir o processo.

Indicar as suas fronteiras, as interações com outros processos e os fatores que o podem afetar (pessoas, equipamento, materiais, métodos, ambiente, sistema de medições).

- Determinar as características a controlar.

Os esforços devem se concentrar-se apenas nas características críticas já que não é economicamente viável controlar todas as variáveis.

- Definir a informação a ser recolhida e o sistema de medição.

É necessário especificar as condições, o equipamento de medição bem como os métodos de medição a utilizar.

- Minimizar a variação excessiva no período inicial de implementação.

Reduzir todas as causas de variações desnecessárias (e.g., evitar a mistura de lotes de matéria prima).

2.3.2 PRINCÍPIO DAS CARTAS DE CONTROLO

Uma carta de controlo é constituída por um gráfico que mostra a evolução ao longo do tempo (t) de uma estatística (ω) referente a uma determinada característica da qualidade que se pretende controlar. Esse gráfico possui os pontos provenientes do par (t, ω) e os respetivos limites superior (LSC), inferior (LIC) e sua linha central (LC). Na Figura 2.2 é representada, esquematicamente, uma carta de controlo.

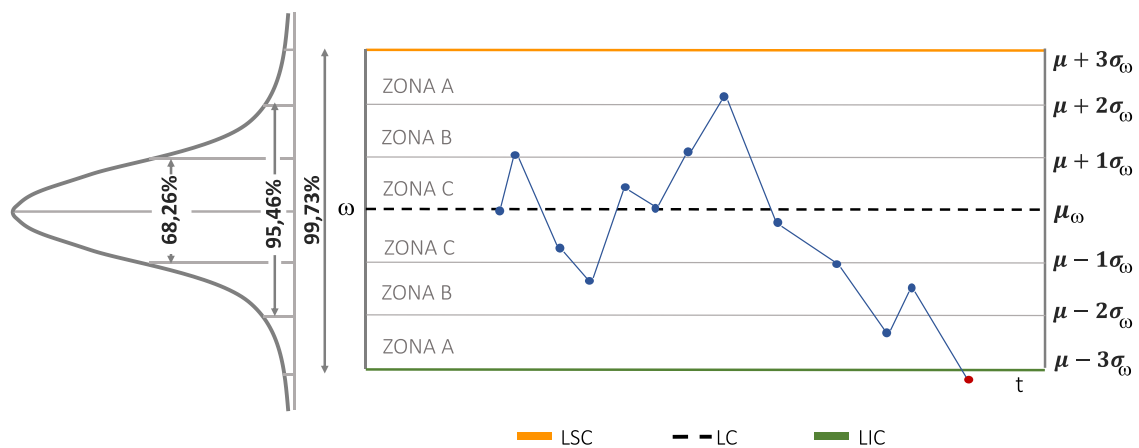


Figura 2.2: Representação de uma carta de controlo

Assume-se que os valores da característica ω seguem uma distribuição aproximadamente Normal com parâmetros $(\mu_{\omega} \text{ e } \sigma_{\omega}^2)$ e, por consequência, os seus limites são dados por (Montgomery & Runger, 2013):

$$LSC_{\omega} = \mu_{\omega} + 3\sigma_{\omega}$$

$$LC_{\omega} = \mu_{\omega} \quad (2.1)$$

$$LIC_{\omega} = \mu_{\omega} - 3\sigma_{\omega}$$

Estes limites de controlo definidos por Shewhart estão localizados a $\pm 3\sigma_{\omega}$ da linha central, o que significa que a probabilidade de um ponto estar fora dos limites é de 0,27% pois $Z_{\alpha/2} = 3$.

Caso algum ponto esteja fora dos limites de controlo, como no caso do ponto a vermelho da Figura 2.2, o processo está fora de controlo estatístico e é considerada uma causa especial de variação.

2.3.3 REGRAS PARA DETEÇÃO DE CAUSAS ESPECIAIS

Na literatura existem oito regras com o intuito de facilitar, de forma visual, a identificação das causas especiais nas cartas de controlo (Norma ISO 7870-2:2013). Por forma a facilitar a sua visualização, foram criadas três zonas nas cartas de controlo (zona A, B e C) (Oakland, 2008). A Figura 2.3 representa as oito regras e as suas respetivas zonas.

Regra 1: Um qualquer ponto fora dos limites de controlo.

Regra 2: Nove pontos consecutivos na zona C, ou além desta zona, do mesmo lado da linha central.

Regra 3: Seis pontos consecutivos no sentido ascendente ou descendente.

Regra 4: Catorze pontos consecutivos crescendo e decrescendo alternadamente.

Regra 5: Dois de três pontos consecutivos na zona A, ou além desta zona, do mesmo lado da linha central.

Regra 6: Quatro de cinco pontos consecutivos na zona B ou A, ou além destas zonas, do mesmo lado da linha central.

Regra 7: Quinze pontos consecutivos na zona C acima e abaixo da linha central.

Regra 8: Oito pontos consecutivos de ambos os lados da linha central, sem nenhum na zona C.

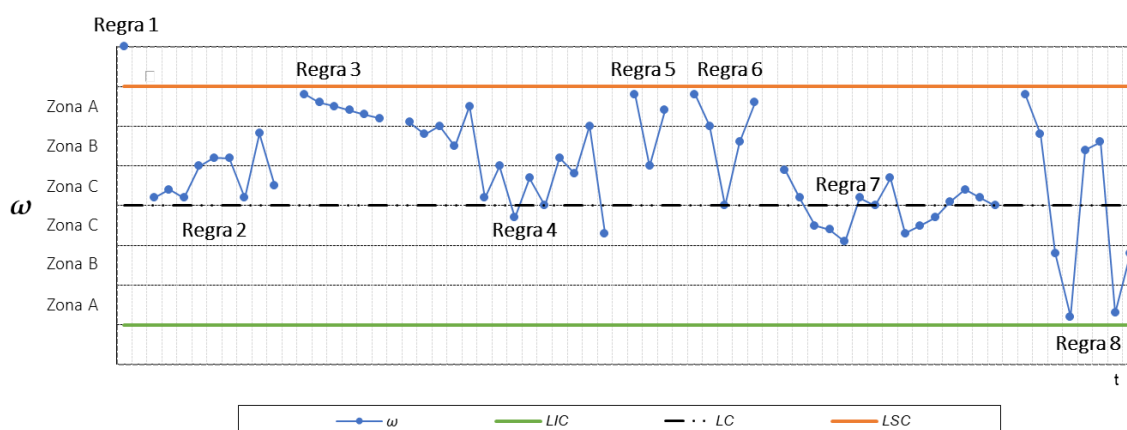


Figura 2.3: Regras de detecção de causas especiais

2.3.4 TIPOS DE CARTAS DE CONTROLO

Dependendo da característica que se pretende controlar, existem diferentes tipos de cartas de controlo. As cartas de controlo tradicionais são constituídas por dois grandes grupos: (i) as cartas de controlo de variáveis e (ii) as cartas de controlo de atributos (Shewhart, 1931).

A Tabela 2.1 sintetiza as cartas de controlo mais utilizadas tanto para o controlo de variáveis como de atributos.

Tabela 2.1: Tipos de cartas de controlo

Cartas de Controlo			
VARIÁVEIS		ATRIBUTOS	
Tipo	Aplicabilidade	Tipo	Aplicabilidade
Carta \bar{X} e Carta R	Média e Amplitude	Carta p	Proporção de unidades não conformes
Carta \bar{X} e Carta S	Média e Desvio Padrão	Carta np	Número de unidades não conformes
Carta \tilde{X} e Carta R	Mediana e Amplitude	Carta c	Número de defeitos
Carta X e Carta MR	Observações Individuais e Amplitudes Móveis	Carta u	Número de defeitos por unidade

As cartas de controlo de variáveis são usadas para o controlo de dados contínuos, como por exemplo distâncias, peso e outras dimensões.

As cartas de controlo de atributos são usadas para o controlo de dados discretos, como o número de unidades não conformes (defeituosas) ou o número de defeitos.

Apenas serão abordadas as cartas de controlo de variáveis, uma vez que são as que serão estudadas ao longo da presente dissertação.

2.3.5 CONSTRUÇÃO DAS CARTAS DE CONTROLO

A construção das cartas de controlo é um processo iterativo, tendo duas fases de desenvolvimento e implementação, a Fase 1 e a Fase 2 (Jones-Farmer, Woodall, Steiner, & Champ, 2014).

FASE 1

O grande objetivo da Fase 1 é a estimação dos parâmetros do processo, até agora desconhecidos, e a verificação da estabilidade do mesmo, ou seja, se o processo não apresenta causas especiais de variação, apenas, sendo o caso, causas comuns.

Nesta fase é efetuada uma recolha de dados com a intenção de calcular os limites de controlo temporários de modo a verificar se o processo se encontra ou não sob controlo estatístico. Os limites de controlo podem ser calculados a partir das equações da Tabela 2.2. É necessário recolher m amostras de dimensão n de modo a que o total de $n \times m$ seja maior que 100, para que se possa estudar convenientemente se esses dados apresentam uma distribuição aproximadamente Normal.

As cartas de controlo de Shewhart, por serem fáceis de construir e interpretar, são bastante usadas nesta fase.

Caso se detetem causas especiais de variação, é necessário eliminá-las e calcular novos limites de controlo. Este processo repete-se até serem eliminadas todas as causas de variação. É necessário realçar que se se verificarem muitas causas especiais, deve-se colocar em causa a qualidade dos dados recolhidos e, eventualmente, descartá-los. Após a estabilidade do processo ser assegurada, estima-se a média e o desvio padrão do mesmo e procede-se à verificação da sua capacidade (Pereira & Requeijo, 2012). Na Tabela 2.3 encontram-se as estimativas da média e do desvio padrão do processo.

Tabela 2.2: Resumo dos limites das cartas para controlo de variáveis para parâmetros do processo não conhecidos

		LSC	LC	LIC
Média e Amplitude	\bar{X}	$\bar{\bar{X}} + A_2 \bar{R}$	$\bar{\bar{X}}$	$\bar{\bar{X}} - A_2 \bar{R}$
	R	$D_4 \bar{R}$	\bar{R}	$D_3 \bar{R}$
Média e Desvio Padrão	\bar{X}	$\bar{\bar{X}} + A_3 \bar{S}$	$\bar{\bar{X}}$	$\bar{\bar{X}} - A_3 \bar{S}$
	S	$B_4 \bar{S}$	\bar{S}	$B_3 \bar{S}$
Mediana e Amplitude	\tilde{X}	$\tilde{\bar{X}} + A_2 \bar{R}$	$\bar{\bar{X}}$	$\bar{\bar{X}} - A_2 \bar{R}$
	R	$D_4 \bar{R}$	\bar{R}	$D_3 \bar{R}$
Observações Individuais e Amplitudes Móveis	X	$\bar{\bar{X}} + \frac{3}{d_2} \overline{MR}$	$\bar{\bar{X}}$	$\bar{\bar{X}} - \frac{3}{d_2} \overline{MR}$
	MR	$D_4 \overline{MR}$	\overline{MR}	$D_3 \overline{MR}$

Tabela 2.3: Estimação dos parâmetros do processo

CARTAS	MÉDIA	DESVIO PADRÃO
\bar{X} e R	$\mu = \bar{\bar{X}}$	$\sigma = \frac{\bar{R}}{d_2}$
\bar{X} e S	$\mu = \bar{\bar{X}}$	$\sigma = \frac{\bar{S}}{c_4}$
\tilde{X} e R	$\mu = \tilde{\bar{X}}$	$\sigma = \frac{\bar{R}}{d_2}$
X e MR	$\mu = \bar{\bar{X}}$	$\sigma = \frac{\overline{MR}}{d_2}$

FASE 2

Na Fase 2, os parâmetros já são conhecidos através da sua estimação na Fase 1. Esta é a fase de monitorização do processo. Nesta fase a média e a variância são comparadas com os respetivos limites de controlo à medida que as amostras são recolhidas e são colocados no gráfico. É essencial verificar, ao longo do tempo, se existe alguma situação fora de controlo e em

caso afirmativo, é necessário identificar a respetiva causa e implementar ações corretivas (Pereira & Requeijo, 2012). Na Tabela 2.4 apresentam-se os limites de controlo para a Fase 2 do SPC.

Tabela 2.4: Resumo dos limites das cartas para controlo de variáveis para parâmetros do processo conhecidos

		LSC	LC	LIC
Média e Amplitude	\bar{X}	$\mu + A\sigma$	μ	$\mu - A\sigma$
	R	$D_2\sigma$	$d_2\sigma$	$D_1\sigma$
Média e Desvio Padrão	\bar{X}	$\mu + A\sigma$	μ	$\mu - A\sigma$
	S	$B_6\sigma$	$c_4\sigma$	$B_5\sigma$
Mediana e Amplitude	X	$\mu + A\sigma$	μ	$\mu - A\sigma$
	R	$D_2\sigma$	$d_2\sigma$	$D_1\sigma$
Observações Individuais e Amplitudes Móveis	X	$\mu + 3\sigma$	μ	$\mu - 3\sigma$
	MR	$D_2\sigma$	$d_2\sigma$	$D_1\sigma$

2.3.6 INDICADORES DE DESEMPENHO

Após a construção das cartas de controlo, é necessário avaliar o seu desempenho. *Average Run Length* (ARL) é a medida mais utilizada para avaliar o desempenho das cartas de controlo. Há dois tipos de ARL, $ARL_{Em\ Controlo}$ e $ARL_{Fora\ de\ Controlo}$. O ARL é definido pelo número médio de pontos que existem até haver um ponto fora dos limites de controlo, estando o processo em controlo ou fora de controlo, dependendo do tipo de ARL. O ideal será maximizar o $ARL_{Em\ Controlo}$ pois minimiza o número de falsos alarmes e minimizar o $ARL_{Fora\ de\ Controlo}$ de modo a aumentar a rapidez em detetar uma causa especial, melhorando o desempenho das cartas (Pereira e Requeijo, 2012).

No caso de se tratar das cartas de controlo de Shewhart e de um processo com observações independentes, o $ARL_{Em\ Controlo}$ pode ser calculado a partir da equação:

$$ARL_{Em\ Controlo} = ARL_{EC} = \frac{1}{\alpha} \quad (2.2)$$

A probabilidade de qualquer ponto exceder os limites de controlo estando sob controlo estatístico é representada por α , esta probabilidade é também designada por nível de significância, risco do produtor ou probabilidade de cometer o *erro tipo I*, isto é, a probabilidade de se considerar a existência de uma causa especial de variação quando tal não acontece.

No caso das cartas de Shewhart, como o valor de α corresponde a 0,27%, o $ARL_{Em\ Controlo}$ será 370, ou seja, de 370 em 370 pontos existirá, em média, um falso alarme. Caso o processo esteja fora de controlo, o $ARL_{Fora\ de\ Controlo}$ é dado por:

$$ARL_{Fora\ de\ Controlo} = ARL_{FC} = \frac{1}{1 - \beta} \quad (2.3)$$

A probabilidade de ocorrer o erro do tipo II, isto é, assumir que o processo está sob controlo estatístico quando na realidade não está, é dado por β . Já $(1 - \beta)$ corresponde à probabilidade de qualquer ponto exceder os limites de controlo quando o processo está fora de controlo estatístico. É importante salientar que não é possível diminuir β e α em simultâneo, para a mesma dimensão de amostra, tornando-se necessário encontrar um compromisso entre os dois tipos de erro.

2.3.7 CAPACIDADE DO PROCESSO

Para além de avaliar o desempenho das cartas de controlo, é necessário averiguar se o processo consegue produzir de acordo com a especificação técnica imposta para o produto, ou seja, é necessário averiguar a sua capacidade. Este é um fator muito importante para melhorar a qualidade do produto/processo pois permite verificar se o processo é capaz de produzir de acordo com as especificações ajudando a tomar decisões acerca de eventuais modificações a introduzir por exemplo, ao nível das máquinas, mão-de-obra, métodos ou fornecedores, com o intuito de reduzir a variabilidade do processo (Pereira & Requeijo, 2012).

A capacidade do processo é calculada a partir de índices que auxiliam na tomada de decisão. Todos os índices de capacidade que se apresentam seguidamente são para dados Normalmente distribuídos onde a sua variação aceitável é de 6σ .

O estudo da capacidade do processo tem sido desenvolvido ao longo dos anos e os seus índices têm vindo a evoluir. São consideradas três gerações de *índices de capacidade do processo*. A primeira geração é caracterizada pelo índice C_p (índice de capacidade potencial), que, apresenta algumas limitações. Os índices C_{pk} e C_{pm} são considerados índices de segunda geração. Por fim, surgiu o índice C_{pmk} , análogo ao C_{pk} , de terceira geração. O índice C_{pk} , ou o C_{pmk} , é o verdadeiro índice de capacidade do processo.

ÍNDICE C_p

O índice de capacidade potencial é, de todos, o índice mais simples. Quanto maior for o seu valor, menor é a probabilidade de o processo apresentar valores fora das especificações. É utilizado para especificações bilaterais (Pereira & Requeijo, 2012).

Este índice foi desenvolvido por Juran (1999) e é dado por:

$$C_p = \frac{LSE - LIE}{6\sigma} \quad (2.4)$$

em que:

LSE: Limite Superior de Especificação

LIE: Limite Inferior de Especificação

σ : Desvio padrão do processo

Considera-se que $C_p \geq 1,33$ é considerado um valor aceitável para processos ou máquinas quando a especificação é bilateral, no entanto, não é o suficiente para se poder afirmar que se está a produzir de acordo com as especificações. Este índice apenas tem em conta a variação do processo ignorando a média do mesmo, isto é, o processo pode ter um valor aceitável de C_p mas a média não estar de acordo com a especificação, tal como apresentado na Figura 2.4, onde o processo B apresenta percentagem de observações fora da especificação.

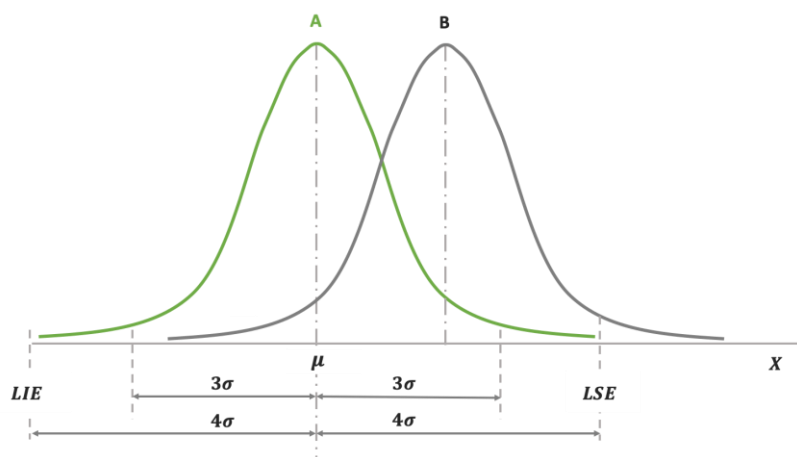


Figura 2.4: Exemplo associado ao valor de C_p (adaptado de Pereira e Requeijo (2012))

ÍNDICE C_{pk}

O índice de capacidade C_{pk} tem em conta, para além da dispersão, a média do processo e permite verificar se o processo está centrado com a sua especificação técnica. Para além disso, pode ser utilizado para processos com especificações bilaterais ou unilaterais. Foi introduzido por Kane (1986) e é dado por:

$$C_{pk} = \min\left((C_{pk})_I, (C_{pk})_S\right) \quad (2.5)$$

com

$$(C_{pk})_I = \frac{\mu - LIE}{3\sigma} \quad (2.6)$$

$$(C_{pk})_S = \frac{LIE - \mu}{3\sigma} \quad (2.7)$$

Caso a especificação seja bilateral, o processo será capaz se $C_{pk} \geq 1,33$.

Caso a especificação seja unilateral, o índice de capacidade do processo é dado pela equação 2.6 ou 2.7. Nos casos em que a especificação técnica é unilateral, considera-se que o processo é capaz se $C_{pk} \geq 1,25$, no entanto, procura-se sempre ter o valor de C_{pk} o mais elevado possível.

ÍNDICE C_{pm}

Este índice, que se baseia no mesmo princípio do índice C_p , tem em conta a amplitude da especificação ($LSE - LIE$), assim como a amplitude do processo que em vez de ser 6σ , passa a ter em conta o desvio entre a média e o valor nominal da característica (T). Este índice é atribuído a Chan et al. (1988) e Hsiang & Taguchi (1985) e é dado por:

$$C_{pm} = \frac{LSE - LIE}{6\sqrt{\sigma^2 + (\mu - T)^2}} \quad (2.8)$$

ÍNDICE C_{pmk}

Este índice é análogo ao índice C_{pk} , mas, tal como o índice C_{pm} , considera o desvio entre a média e o valor nominal (T) da característica na amplitude do processo. Índice criado por Pearn et al. (1992) e dado por:

$$C_{pmk} = \frac{\min(LSE - \mu, \mu - LIE)}{3\sqrt{\sigma^2 + (\mu - T)^2}} \quad (2.9)$$

2.3.8 CONDIÇÕES DE UTILIZAÇÃO

De modo a se proceder à implementação adequada das cartas de controlo, é necessário ter em atenção algumas condições na sua utilização. Os métodos abordados neste capítulo aplicam-se a dados independentes segundo uma distribuição Normal.

No caso da independência de dados não se verificar, deve-se recorrer a técnicas de Controlo Estatístico de Processos com Dados Auto Correlacionados, técnicas essas que não serão abordadas nesta dissertação.

Ter dados Normalmente distribuídos afigura-se como a situação ideal, contudo, a Normalidade não é uma condição imprescindível. Caso tal Normalidade não se verifique, deve proceder-se a uma transformação de dados e calcular os novos limites de controlo associados a essa transformação (Pereira & Requeijo, 2012).

Existem alguns desenvolvimentos e discussões sobre o efeito da não-Normalidade na eficiência das cartas de controlo da dispersão, nomeadamente da carta R , carta S , no controlo da dispersão. Mesmo não sendo Normais, estas cartas são construídas considerando o pressuposto de Normalidade, situando-se os limites de controlo a três desvios padrão da distribuição associada à respetiva variável tornando os resultados menos precisos (Woodall, 2000).

Um dos objetivos da presente dissertação é precisamente confirmar a não-Normalidade da dispersão nas cartas S e R e propor uma nova carta (carta $\ln(S^2)$) através da transformação de dados de modo a obter a respetiva Normalização, tornando assim os resultados mais rigorosos.

2.3.9 VANTAGENS

As cartas de controlo são utilizadas por quem lida diretamente com o processo produtivo possuindo inúmeras vantagens quando se trata de controlá-lo estaticamente. Ajudam o processo

a manter-se sob controlo estatístico, fornecendo informação sobre o seu estado e a sua capacidade, prevenindo ajustes desnecessários. Após o processo estar sob controlo estatístico, as cartas de controlo permitem ainda melhorá-lo continuamente, aumentando a sua fiabilidade e contribuindo para uma melhoria da produtividade (Montgomery, 2012). Para além disso, são de muito simples de leitura e construção, sendo por isso cartas bastante utilizadas.

2.3.10 DESVANTAGENS

As cartas de controlo tradicionais consideram apenas as últimas informações acerca do processo, ignorando as informações dadas pela sequência de dados e, por sua vez, diminuindo a sensibilidade de deteção de pequenas alterações nos parâmetros do processo. Esta situação é resolvida com a aplicação de cartas especiais que possuem memória, ou seja, que não ignoram a sequência de dados do processo.

2.4 CARTAS DE CONTROLO ESPECIAIS

Cada vez mais há uma produção mais variada de produtos e em menor quantidade, o que exige um maior controlo dos processos produtivos. Desde as primeiras cartas de controlo introduzidas por Shewhart, foram vários os avanços nesta área no sentido de criar um conjunto vasto de técnicas adaptáveis a cada tipo de situação de modo a contribuir para a melhoria dos processos produtivos.

Houve necessidade de criar cartas que não ignorassem a sequência de dados do processo, de modo a aumentar a sensibilidade na deteção de causas especiais, sem aumentar os custos inerentes à aplicação do *SPC*. Foram criadas as cartas de Somas Acumuladas (*CUSUM*) e as cartas de Média Móvel Exponencialmente Amortecida (*EWMA*). Estas duas cartas são conceptualmente diferentes das cartas tradicionais, pois consideram não só a informação no instante em causa mas, também, os momentos anteriores, pelo que são habitualmente designadas como cartas de controlo com memória. Estas técnicas especiais são usadas para controlar tanto a média como a dispersão do processo (Pereira & Requeijo, 2012).

Um dos objetivos da presente dissertação é o desenvolvimento de uma ferramenta computacional que possibilite a obtenção dos valores dos parâmetros das cartas de controlo *CUSUM-In(S²)* mais precisos comparativamente aos já obtidos por investigações anteriores. Este capítulo vai, assim, focar-se em exclusivo nas cartas de controlo *CUSUM* para controlo da média e da dispersão do processo, não sendo abordadas as cartas *EWMA*.

2.4.1 CARTA CUSUM PARA CONTROLO DA MÉDIA DO PROCESSO

A carta de controlo *CUSUM* é uma ferramenta estatística que acumula informações dos valores das estatísticas das amostras de um processo ponderando-as igualmente, ou seja, todos os dados têm o mesmo peso. O seu procedimento baseia-se na recolha sucessiva de amostras de dimensão n , na qual é obtida a Estatística da Soma Acumulada.

A técnica de Soma Acumulada (*CUSUM*) pode ser aplicada tanto na construção da Carta *CUSUM* para observações individuais, como para médias de amostras. Além das cartas de controlo *CUSUM* para variáveis, cuja estatística é a média das amostras ou o valor individual da observação, esta técnica pode ser aplicada para o controlo de atributos que em relação ao controlo de variáveis é menos utilizada.

CUSUM TABULAR

Existem vários métodos para construção da carta *CUSUM*, sendo que o método mais usado é uma versão tubular da carta *CUSUM*. Estas cartas foram essencialmente desenvolvidas por Gan (1991) e Woodal (1986). Basicamente consiste na construção de duas semi-cartas, uma para detetar aumentos (C) e outra para detetar decréscimos (T) da média do processo. As variáveis que dão suporte à construção baseiam-se nos dados recolhidos, dos parâmetros da carta (k e h) e de ARL_{EC} . O parâmetro k corresponde ao valor de referência para detetar uma alteração (δ) da média do processo enquanto h refere-se ao limite de controlo para detetar uma alteração (δ) da média do processo. As duas semi-cartas são definidas tendo por base as duas estatísticas:

$$T_t = \min(0, T_{t-1} + (Z_t + k)) \quad (2.10)$$

$$C_t = \max(0, C_{t-1} + (Z_t - k)) \quad (2.11)$$

Onde $T_0 = 0 \quad (2.12)$

$$C_0 = 0 \quad (2.13)$$

$$Z_t = \frac{\bar{X}_t - \mu}{\sigma_{\bar{X}}} = \frac{\bar{X}_t - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \quad (2.14)$$

$$\Delta = \delta \cdot \sigma_{\bar{X}} \quad (2.15)$$

$$\delta = \frac{\Delta}{\sigma_{\bar{X}}} = \frac{\Delta \sqrt{n}}{\sigma} \quad (2.16)$$

$$k = \frac{\delta}{2} \quad (2.17)$$

A simbologia utilizada nas equações anteriores foi:

\overline{X}_t - média da amostra t

μ - valor inicial da média do processo

σ - desvio padrão do processo

n - dimensão da amostra

Z_t - variável Normal reduzida referente a \overline{X}_t

k - valor de referência

O processo é considerado fora de controlo estatístico caso se verifique uma das duas condições seguintes:

$$T_t < -h \quad (2.18)$$

$$C_t > h \quad (2.19)$$

Caso se detete uma alteração da média do processo, torna-se pertinente determinar novamente o valor da média do processo para que as ações tomadas possam ser baseadas em resultados mais precisos. O novo valor da média pode ser calculado a partir da seguinte equação:

$$\begin{cases} \mu + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \left(k + \frac{C_t}{N_C} \right), & \text{se } C_t > h \\ \mu - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \left(k - \frac{T_t}{N_T} \right), & \text{se } T_t < -h \end{cases} \quad (2.20)$$

O parâmetro h da carta *CUSUM* podem ser obtido a partir dos ábacos desenvolvidos por Gan (1991).

CUSUM-FIR

As cartas *CUSUM-FIR* (*Fast Initial Response*) são uma variante das cartas *CUSUM* e têm como principal objetivo aumentar a sensibilidade da carta *CUSUM* no início da análise do processo. A nível da sua construção, estas cartas são muito semelhantes às cartas *CUSUM*, a única diferença está nos valores de T_0 e de C_0 que deixam de ser constantes e iguais a zero. O facto de estes dois valores serem variáveis conduz à deteção mais rápida de uma eventual alteração da média do processo, ou seja, se as primeiras amostras do estudo apresentarem valores significativamente diferentes do valor alvo, essa alteração será detetada mais rapidamente comparativamente com a carta *CUSUM*, resultando, assim, num menor $ARL_{Fora\ de\ Controlo}$. Para a carta *CUSUM-FIR*, os valores iniciais de T e C são dados por:

$$T_0 = -\frac{h}{2} \quad (2.21)$$

$$C_0 = \frac{h}{2} \quad (2.22)$$

A utilização dos valores diferentes de zero apresenta duas grandes vantagens. No caso do estudo se iniciar quando o processo está controlado estatisticamente, com um valor da média próximo do valor alvo, os valores de T e C da carta *CUSUM-FIR* tendem rapidamente para valores próximos de zero, notando-se um pequeno efeito de T_0 ou C_0 na carta de controlo. Se, pelo contrário, quando o estudo se inicia, o processo apresentar, desde logo, um valor da média suficientemente diferente do valor alvo, os valores iniciais T_0 ou C_0 levam a carta *CUSUM* a detetar mais rapidamente uma eventual alteração da média do processo, resultado, assim, um menor valor para $ARL_{Fora\ de\ Controlo}$ (Pereira & Requeijo, 2012).

Mais uma vez, os seus parâmetros podem ser encontrados nos ábacos desenvolvidos por Gan (1991).

2.4.2 CARTA CUSUM PARA CONTROLO DA DISPERSÃO DO PROCESSO

Graças à maior preocupação pela redução da variabilidade, o estudo da dispersão do processo tem merecido um interesse acrescido, em particular a partir dos anos 80 do Século XX. As primeiras cartas de controlo para a dispersão foram introduzidas por Shewhart, no entanto, as suas cartas para o controlo da dispersão (cartas MR , R , S) possuem pouca sensibilidade para detetar alterações da dispersão do processo, especialmente quando ocorre um decréscimo no desvio padrão, ou seja, quando ocorre uma melhoria no processo.

As cartas de controlo especiais destacam-se pois são igualmente eficazes a detetar tanto decréscimos como aumentos da dispersão do processo, sendo uma mais-valia para o SPC (Pereira & Requeijo, 2012).

Caso os dados sejam organizados em amostras, os exemplos mais comuns de utilização são as cartas *CUSUM-R*, *CUSUM-S*, *CUSUM-S²* e *CUSUM-ln(S²)*. Caso contrário, o controlo da dispersão do processo é feito pelas cartas *CUSUM-MR* e *H81-CUSUM*.

Neste capítulo será abordada, em pormenor, apenas a carta mais relevante para esta dissertação, ou seja, a carta *CUSUM-ln(S²)*. Nesta secção, assume-se que todos os valores da característica a estudar são independentes e identicamente distribuídos segundo uma distribuição Normal com média de μ e variância σ^2 (Pereira & Requeijo, 2012).

CUSUM-LN(S²)

Na construção da carta *CUSUM-ln(S²)* é necessário definir duas variáveis: a variável *C* e a variável *D*. Estes valores são determinados a partir dos valores da estatística *ln(S²)*. A partir destas duas variáveis, adaptadas por Chang e Gan (1995), é possível construir duas semi-cartas: uma para detetar aumentos da variância do processo (*C*) e a outra para detetar decréscimos na variância do processo (*D*) definidas por:

$$C_t = \max(0, C_{t-1} + Y_t - k_C) \quad (2.23)$$

$$D_t = \min(0, D_{t-1} + Y_t - k_D) \quad (2.24)$$

$$\text{Onde} \quad C_0 = u \quad (2.25)$$

$$D_0 = v \quad (2.26)$$

Nesta carta, $0 \leq u \leq h_C$ e $-h_D \leq v \leq 0$, onde h_C e h_D são os limites de controlo para as variáveis *C* e *D*. Para esta carta considera-se que u e v são iguais a zero. A variável Y_t , no instante t , é dada por:

$$Y_t = \ln\left(\frac{S_t^2}{\sigma_0^2}\right) \quad (2.27)$$

Onde *ln(S²)* é o logaritmo natural da variância da amostra *t(S²)*. Quando $C_t > h_C$ deteta-se um aumento e quando $D_t < -h_C$ um decréscimo da variância do processo.

CONSTRUÇÃO DE UMA CARTA $CUSUM-LN(S^2)$

Para a construção da carta $CUSUM-LN(S^2)$ é necessário ter em conta um procedimento (Pereira & Requeijo, 2012):

1. Definir a dimensão da amostra (n).
2. Selecionar o valor aceitável para ARL , quando o processo está sob controlo estatístico ($ARL_{Em\ Controlo}$).
3. Decidir qual o valor do desvio padrão (σ_1) que é importante estudar. O valor do σ_1 pode ser diferente consoante se pretende detetar um decréscimo ou um aumento.
4. Determinar a alteração $\delta = \sigma_1 / \sigma_0$ que se pretende detetar.
5. Conhecidos os valores de δ , n e $ARL_{Em\ Controlo}$, determinar os melhores valores dos parâmetros k e h , de forma a obter o menor valor de $ARL_{Fora\ de\ Controlo}$.

Os valores de k_C , k_D , h_C e h_D podem ser obtidos de duas formas distintas:

- A partir do *software* atualizado no presente trabalho (*software* inicialmente desenvolvido por Nogueira (2018), ou;
- Recorrendo às tabelas desenvolvidas por Chang e Gan (1995), disponibilizadas no ANEXO B.

CARTA $FIRCUSUM-LN(S^2)$

Caso, no início do estudo, haja possibilidade de haver uma situação fora de controlo, recorre-se ao procedimento *FIR*, pois este aumenta a sensibilidade das cartas no início do processo. Esta carta é baseada nos mesmos princípios da carta $CUSUM-LN(S^2)$, a diferença reside nos valores iniciais das variáveis C e D , que são diferentes de zero e dados por:

$$D_0 = -\frac{h_D}{2} \quad (2.28)$$

$$C_0 = \frac{h_C}{2} \quad (2.29)$$

Para a carta $FIRCUSUM-LN(S^2)$, a determinação dos parâmetros k_C , k_D , h_C e h_D é feita a partir das tabelas desenvolvidas por Chang e Gan (1995).

2.4.3 PARÂMETROS DAS CARTAS CUSUM

Os parâmetros das cartas *CUSUM*, tanto para controlo da média bem como da dispersão podem ser obtidos de duas formas distintas:

- A partir do *software* atualizado no presente trabalho, que contempla uma ampla gama de valores para as mais variadas situações, ou;
- Recorrendo às tabelas desenvolvidas por Gan (1991) e Chang e Gan (1995), para controlo da média e da dispersão (ANEXO B). No entanto estas tabelas não contemplam uma vasta gama de situações, o que pode limitar o estudo das cartas *CUSUM*.

2.4.4 ARL PARA AS CARTAS CUSUM

Como já abordado anteriormente, o *ARL* (*Average Run Length*) é o número esperado de observações até que um alarme seja sinalizado. O ideal é que o *ARL* quando o processo está sob controlo estatístico ($ARL_{Em\ Controlo}$) seja o maior possível e quando o processo está fora do controlo estatístico seja o menor possível ($ARL_{Fora\ de\ Controlo}$).

O *ARL* das cartas *CUSUM* depende da dimensão da amostra (n), do valor de referência (k) e do limite de controlo (h). De modo a obter a melhor combinação de $ARL_{Fora\ de\ Controlo}$ e $ARL_{Em\ Controlo}$ é necessário estudar o efeito que as variáveis têm entre si. Não é possível a obtenção simultânea de *ARL* e h , pelo que é necessário fixar um dos valores para que se possa calcular o outro. Daí a complexidade do cálculo do *ARL* para estas cartas.

Foram desenvolvidos vários modelos e aproximações de modo a calcular o $ARL_{Em\ Controlo}$ da forma mais precisa das cartas *CUSUM*. Neste capítulo serão abordadas algumas técnicas para o cálculo do $ARL_{Em\ Controlo}$, para as cartas *CUSUM*, tanto para o controlo da média como da dispersão.

ARL PARA CONTROLO DA MÉDIA

Quando a simplicidade de obtenção do $ARL_{Em\ Controlo}$ é muito importante, é recomendada a utilização da aproximação dada por Siegmund (1985). Esta aproximação permite o cálculo rápido do *ARL* para cada semi-carta *CUSUM* com erro de 1-3% (Woodall & Adams, 1993) e é dada por:

$$ARL = \frac{e^{-2\Delta b} + 2\Delta b - 1}{2\Delta^2} \quad (2.30)$$

$$\text{Onde} \quad \Delta = \pm \delta - k \quad (2.31)$$

$$b = h + 1,166 \quad (2.32)$$

Para $\Delta \neq 0$, δ representa uma alteração da média do processo e é usado o sinal positivo para a semi-carta de aumentos e o sinal negativo para a semi-carta de decréscimos. Caso $\Delta \neq 0$, $ARL=b^2$. Para obter o valor de ARL para cada semi-carta é calculado por:

$$\frac{1}{ARL} = \frac{1}{ARL^+} + \frac{1}{ARL^-} \quad (2.33)$$

Onde o ARL^+ representa o ARL da semi-carta para deteção de aumentos da média enquanto ARL^- representa o ARL da semi-carta para deteção de decréscimos da média do processo é recomendada a utilização dos valores iniciais de $k = 1/2$, ao invés de $k = \delta/2$, e de $h = \{4;5\}$ (Montgomery, 2012).

Foi introduzido por Vance (1986) um programa computacional muito preciso para calcular o ARL para controlo da média em que a característica da qualidade estudada segue uma distribuição Normal. No entanto, quando é possível recorrer a métodos computacionais, é recomendado o desenvolvimento de Hawkins (1992) que desenvolveu uma equação aproximada que permite calcular o ARL de forma muito precisa. Esta técnica é muito mais simples e, para ser aplicada corretamente, necessita apenas de uma tabela de constantes, criada pelo autor, de modo a calcular o ARL com 1%-3% de erro (Woodall & Adams, 1993).

ARL PARA CONTROLO DA DISPERSÃO

Chang e Gan (1995) desenvolveram uma equação integral, para o cálculo do ARL da semi-carta de aumentos para controlo da dispersão, dada por:

$$H(u) = 1 + H(0) \Pr(\log(S^2) \leq k_c - u) + \int^{h_c} H(x) f(x + k_c - u) dx \quad (2.34)$$

Onde $H(u)$ e $L(v)$ correspondem ao ARL das semi-cartas dos aumentos e dos decréscimos, respetivamente, e Pr à probabilidade.

Com as devidas alterações, a equação para o cálculo da semi-carta de decréscimos ($L(v)$) é semelhante. No entanto, estas equações não calculam o ARL_{EC} das duas semi-cartas em simultâneo. Foi desenvolvida, por Lucas (1985), uma equação que permite o cálculo do ARL das duas cartas em simultâneo, e é dada por:

$$ARL_2 = \frac{H(u)L(0) + H(0)L(v) - H(0)L(0)}{H(0) + L(0)} \quad (2.35)$$

Onde o v e o u são os valores iniciais de cada semi-carta.

CADEIAS DE MARKOV

Algumas técnicas não cobrem certos aspetos inerentes nas cartas *CUSUM*, pelo que para colmatar o problema foi desenvolvido um método alternativo para o cálculo do *ARL* através das cadeias de Markov que permitem analisar a carta sem ter de realizar muitas simulações. As cadeias de Markov são o modelo mais complexo das simulações de Monte Carlo e servem para modelar sistemas onde a probabilidade de ocorrência de um acontecimento futuro depende apenas do estado atual e não da sequência de eventos que precederam (Brooks & Evans, 1972). Esta técnica aplica-se tanto às cartas *CUSUM* para controlo da média como da dispersão.

3 NOVA CARTA $LN(S^2)$ E CÁLCULO DOS SEUS PARÂMETROS

O primeiro objetivo desta dissertação é concretizado neste capítulo. Como já abordado anteriormente, as cartas de controlo tradicionais são aplicadas quando os dados são independentes entre si e que seguem uma distribuição Normal (com média μ e variância σ^2).

Existem alguns desenvolvimentos e discussões sobre o efeito da não-Normalidade na eficiência das cartas de controlo da dispersão, nomeadamente das cartas R e S . Mesmo violando este princípio, estas cartas são construídas considerando o pressuposto de Normalidade, possuindo limites de controlo de $\pm 3\sigma$ (Woodall, 2000). Este efeito pode prejudicar a análise do processo pois pode ocorrer uma situação fora de controlo, que se apresenta fora dos 99,73%, mas não é detetada.

Neste capítulo é verificada a não-Normalidade das cartas R e S e proposta uma nova carta $ln(S^2)$ proveniente de uma transformação logarítmica natural da variância, com apoio do *software Matlab*. Este *software* foi o escolhido por conseguir gerar um grande número de dados e assim tornar esta análise o mais precisa possível.

São apresentadas as constantes que apoiam o cálculo dos limites da nova carta de controlo, considerando o mesmo nível de significância de 0,27% das cartas tradicionais, bem como os resultados gráficos obtidos na simulação que comparam as cartas R e S e $ln(S^2)$, para diversas dimensões de amostras.

3.1 NÃO-NORMALIDADE DAS CARTAS R E S

As cartas R e S são baseadas no pressuposto de Normalidade e, por sua vez, os seus limites de controlo também. Seguidamente são desenvolvidos os limites de controlo das cartas R e S e são apresentados os resultados das simulações realizadas no *software Matlab*. Foram realizadas cerca de 10 mil simulações para cada estatística correspondente a cada carta de controlo (R e S) de modo a tornar o estudo o mais preciso possível.

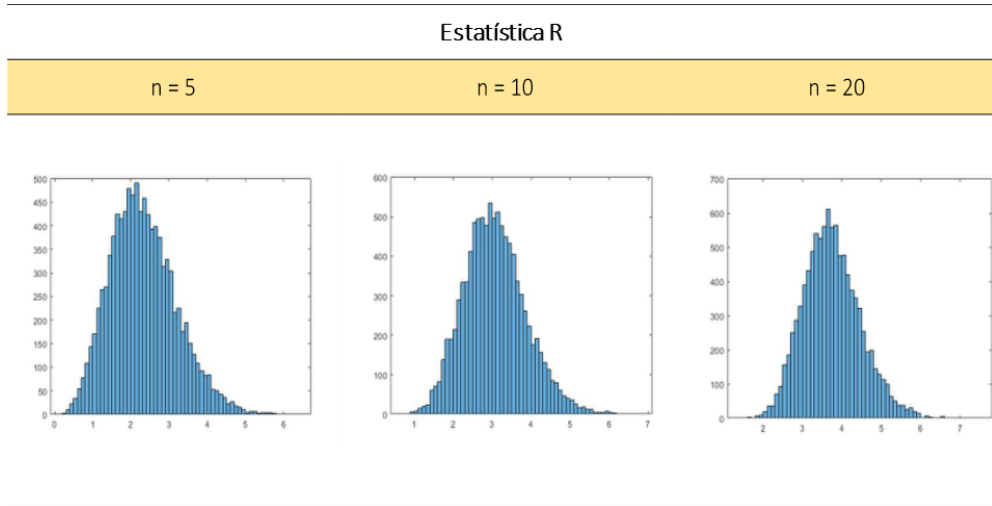
3.1.1 CARTA R

O valor 3 contido na Equação 3.1 está relacionado com $Z_{\alpha/2} = 3$ associado à distribuição Normal, logo, as constantes D_3 e D_4 , para $n > 6$ apresentam valores que conduzem a limites de controlo (LIC_R e LSC_R) à mesma distância da linha central (LC_R).

$$\begin{aligned}
LSC_R &= \mu_R + 3\sigma_R = \bar{R} + 3d_3\sigma = \bar{R} + 3d_3\frac{\bar{R}}{d_2} = \bar{R}\left(1 + 3\frac{d_3}{d_2}\right) = D_4\bar{R} \\
LC_R &= \mu_R = \bar{R} \\
LIC_R &= \mu_R - 3\sigma_R = \bar{R} - 3d_3\sigma = \bar{R} - 3d_3\frac{\bar{R}}{d_2} = \bar{R}\left(1 - 3\frac{d_3}{d_2}\right) = D_3\bar{R}
\end{aligned} \tag{3.1}$$

No entanto, baseado no estudo feito por Woodal (2000) e a partir das simulações obtidas no *software Matlab*, apresenta-se que, apesar de aparentarem serem Normais, as distribuições possuem uma cauda para a direita, maior quanto menor a dimensão da amostra.

Tabela 3.1: Histogramas resultante da simulação em *Matlab* para a estatística *R*



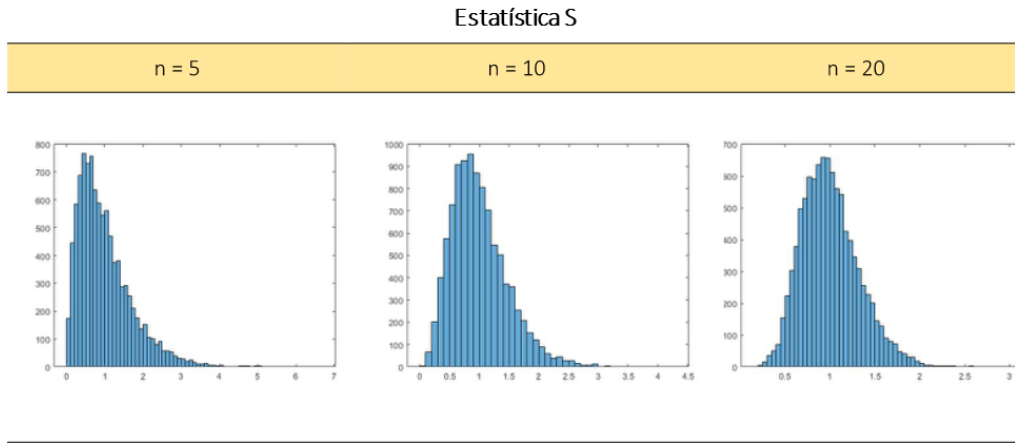
3.1.2 CARTA S

$$\begin{aligned}
LSC_S &= \mu_S + 3\sigma_S = \bar{S} + 3\frac{\bar{S}}{c_4}\sqrt{1-c_4^2} = \bar{S}\left(1 + 3\frac{\bar{S}}{c_4}\sqrt{1-c_4^2}\right) = B_4\bar{S} \\
LC_S &= \mu_S = \bar{S} \\
LIC_S &= \mu_S - 3\sigma_S = \bar{S} - 3\frac{\bar{S}}{c_4}\sqrt{1-c_4^2} = \bar{S}\left(1 - 3\frac{\bar{S}}{c_4}\sqrt{1-c_4^2}\right) = B_3\bar{S}
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Mais uma vez, as constantes B_3 e B_4 são obtidas a partir do pressuposto da Normalidade.

Simulando, no *software Matlab*, a distribuição associada à carta S , torna-se visualmente evidente a sua não-Normalidade (Tabela 3.2). Quando menor a dimensão da amostra mais evidente é a cauda para a direita.

Tabela 3.2: Histogramas resultantes da simulação em *Matlab* para a estatística S



3.2 CARTA \bar{X} e $LN(S^2)$

Para colmatar os problemas associados à não-Normalidade das cartas R e S , neste subcapítulo é proposta uma nova carta proveniente de uma transformação logarítmica natural. Foi realizado um estudo por Crowder e Hamilton (2018) sobre a transformação logarítmica nas cartas $EWMA$ para controlo da dispersão, onde desenvolveram as seguintes deduções:

$$\overline{\ln(S^2)} = \ln(\sigma^2) - \frac{1}{n-1} - \frac{1}{3(n-1)^2} + \frac{2}{15(n-1)^4} \quad (3.3)$$

$$\sigma_{\ln(S^2)}^2 = \frac{2}{n-1} - \frac{2}{(n-1)^2} + \frac{4}{3(n-1)^3} - \frac{16}{15(n-1)^5} \quad (3.4)$$

Nesta sequência, tornou-se pertinente adaptar o trabalho realizado a esta nova carta. São apresentados os limites de controlo e as suas deduções, bem como as comparações com as cartas anteriores.

3.2.1 LIMITES DE CONTROLO

CARTA $LN(S^2)$

Para a Fase 1, quando os parâmetros do processo ainda não são conhecidos, os limites são dados por:

$$\begin{aligned} LSC_{\ln(s^2)} &= \mu_{\ln(s^2)} + k_1 \sigma_{\ln(s^2)} = \overline{\ln(s^2)} + G_4 \\ LC_{\ln(s^2)} &= \overline{\ln(s^2)} \\ LIC_{\ln(s^2)} &= \mu_{\ln(s^2)} - k_2 \sigma_{\ln(s^2)} = \overline{\ln(s^2)} - G_3 \end{aligned} \quad (3.5)$$

Como a distribuição de $\ln(S^2)$ não é completamente normal, os valores de k_1 e k_2 não são iguais a 3. O k_1 e k_2 tomam valores de forma a garantir os percentis de 0.135% e 99.865%.

$$G_4 = k_1 \sigma_{\ln(s^2)} = k_1 \sqrt{\frac{2}{n-1} - \frac{2}{(n-1)^2} + \frac{4}{3(n-1)^3} - \frac{16}{15(n-1)^5}} \quad (3.6)$$

$$G_3 = k_2 \sigma_{\ln(s^2)} = k_2 \sqrt{\frac{2}{n-1} - \frac{2}{(n-1)^2} + \frac{4}{3(n-1)^3} - \frac{16}{15(n-1)^5}} \quad (3.7)$$

Os parâmetros G_3 e G_4 são provenientes da simulação em *Matlab* e apresentam-se na Tabela 3.3. A simulação para obtenção dos parâmetros baseou-se no princípio da localização dos limites de controlo serem definidos de forma a que o risco do tipo I seja 0,27% (Figura 3.1). Mesmo que a distribuição não seja perfeitamente Normal, este método apenas tem em conta a probabilidade e não a simetria.

A estimação média é dada por:

$$\overline{\ln(S^2)} = \frac{\sum_{i=1}^m (\ln(S^2))}{m} \quad (3.8)$$

em que m é o número de amostras.

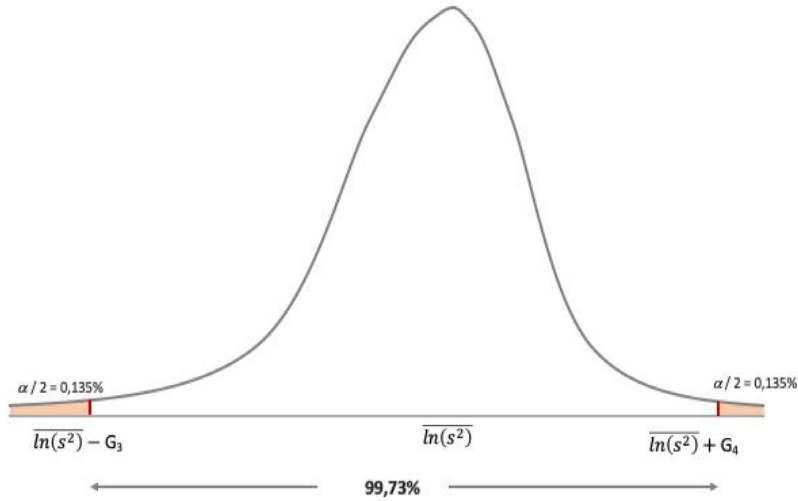


Figura 3.1: Modo de obtenção dos parâmetros G_3 e G_4

Já na Fase 2, quando já são conhecidos os parâmetros do processo (estimados na Fase 1), os limites de controlo são dados por:

$$\begin{aligned} LSC_{\ln(s^2)} &= \ln(\sigma^2) - c_2 + k_1 \sigma_{\ln(s^2)} = \ln(\sigma^2) + G_2 \\ LC_{\ln(s^2)} &= \ln(\sigma^2) - c_2 \\ LSC_{\ln(s^2)} &= \ln(\sigma^2) - c_2 - k_2 \sigma_{\ln(s^2)} = \ln(\sigma^2) - G_1 \end{aligned} \quad (3.9)$$

Onde

$$c_2 = \frac{1}{n-1} + \frac{1}{3(n-1)^2} - \frac{1}{15(n-1)^4} \quad (3.10)$$

$$\sigma_{\ln(s^2)}^2 = \frac{2}{n-1} - \frac{2}{(n-1)^2} + \frac{4}{3(n-1)^3} - \frac{16}{15(n-1)^5} \quad (3.11)$$

Então:

$$G_2 = -c_2 + k_1 \sigma_{\ln(s^2)} = -c_2 + k_1 \left(\frac{2}{n-1} - \frac{2}{(n-1)^2} + \frac{4}{3(n-1)^3} - \frac{16}{15(n-1)^5} \right) \quad (3.12)$$

$$G_1 = c_2 + k_1 \sigma_{\ln(s^2)} = -c_2 - k_1 \left(\frac{2}{n-1} - \frac{2}{(n-1)^2} + \frac{4}{3(n-1)^3} - \frac{16}{15(n-1)^5} \right) \quad (3.13)$$

Os valores de G_1 e G_2 são obtidos por simulação usando o *software Matlab*.

CARTA \bar{X}

Na Fase 1, os limites são dados por:

$$\begin{aligned}
 LSC_{\bar{X}} &= \bar{\bar{X}} + 3\sigma_{\bar{X}} = \bar{\bar{X}} + 3\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \bar{\bar{X}} + \frac{3\sqrt{c_1}}{\sqrt{n}}\sqrt{e^{\ln(S^2)}} = \bar{\bar{X}} + A_4\sqrt{e^{\ln(S^2)}} \\
 LC_{\bar{X}} &= \bar{\bar{X}} \\
 LIC_{\bar{X}} &= \bar{\bar{X}} - 3\sigma_{\bar{X}} = \bar{\bar{X}} - 3\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \bar{\bar{X}} - \frac{3\sqrt{c_1}}{\sqrt{n}}\sqrt{e^{\ln(S^2)}} = \bar{\bar{X}} - A_4\sqrt{e^{\ln(S^2)}}
 \end{aligned} \tag{3.14}$$

A constante A_4 é dada pela equação:

$$A_4 = \frac{3\sqrt{c_1}}{\sqrt{n}} \tag{3.15}$$

Para calcular σ^2 , procedeu-se ao seguinte desenvolvimento:

$$\begin{aligned}
 \ln(\sigma^2) &= \overline{\ln(S^2)} + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{3(n-1)^2} - \frac{2}{15(n-1)^4} \Leftrightarrow \\
 e^{\ln(\sigma^2)} &= \sigma^2 = e^{\overline{\ln(S^2)} + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{3(n-1)^2} - \frac{2}{15(n-1)^4}} = \\
 \sigma^2 &= e^{\overline{\ln(S^2)}} \cdot e^{\frac{1}{n-1} + \frac{1}{3(n-1)^2} - \frac{2}{15(n-1)^4}} = e^{\overline{\ln(S^2)}} \cdot c_1
 \end{aligned} \tag{3.16}$$

Onde:

$$c_1 = e^{\frac{1}{n-1} + \frac{1}{3(n-1)^2} - \frac{2}{15(n-1)^4}} \tag{3.17}$$

Na Fase 2 os limites dão dados por:

$$\begin{aligned}
 LSC_{\bar{X}} &= \mu + 3\sigma_{\bar{X}} = \mu + 3\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \mu + A\sigma \\
 LC_{\bar{X}} &= \mu \\
 LIC_{\bar{X}} &= \mu - 3\sigma_{\bar{X}} = \mu - 3\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \mu - A\sigma
 \end{aligned} \tag{3.18}$$

3.2.2 CONSTANTES

As constantes que dão apoio à construção das cartas $\ln(S^2)$ e \bar{X} são dadas pela Tabela 3.3.

Tabela 3.3: Constantes

Amostra	Carta $\ln(S^2)$					Carta \bar{X}		
	Fase 1		Fase 2			Fase 1		Fase 2
	G_3	G_4	G_1	G_2	c_2	c_1	A_4	A
2	11,901	3,706	13,101	2,506	1,200	3,320	3,865	2,121
3	5,753	2,500	6,328	1,925	0,575	1,777	2,309	1,732
4	4,094	2,069	4,463	1,700	0,369	1,446	1,804	1,500
5	3,424	1,761	3,694	1,491	0,270	1,310	1,536	1,342
6	2,711	1,611	2,924	1,398	0,213	1,238	1,362	1,225
7	2,374	1,450	2,550	1,274	0,176	1,192	1,238	1,134
8	2,214	1,334	2,363	1,185	0,150	1,161	1,143	1,061
9	1,973	1,277	2,104	1,147	0,130	1,139	1,067	1,000
10	1,901	1,203	2,016	1,088	0,115	1,122	1,005	0,949
11	1,688	1,170	1,791	1,067	0,103	1,109	0,952	0,905
12	1,698	1,088	1,792	0,994	0,094	1,098	0,908	0,866
13	1,504	1,059	1,590	0,973	0,086	1,089	0,868	0,832
14	1,461	1,054	1,540	0,975	0,079	1,082	0,834	0,802
15	1,380	1,005	1,454	0,932	0,073	1,076	0,803	0,775
16	1,284	0,990	1,352	0,922	0,068	1,071	0,776	0,750
17	1,292	0,966	1,356	0,903	0,064	1,066	0,751	0,728
18	1,245	0,933	1,305	0,873	0,060	1,062	0,729	0,707
19	1,177	0,893	1,233	0,837	0,057	1,058	0,708	0,688
20	1,127	0,888	1,180	0,834	0,054	1,055	0,689	0,671
21	1,097	0,851	1,148	0,800	0,051	1,052	0,672	0,655
22	1,122	0,866	1,171	0,817	0,048	1,050	0,655	0,640
23	1,105	0,802	1,151	0,756	0,046	1,047	0,640	0,626
24	1,033	0,773	1,077	0,729	0,044	1,045	0,626	0,612
25	1,062	0,781	1,104	0,738	0,042	1,043	0,613	0,600

As constantes G_1 , G_2 , G_3 e G_4 foram desenvolvidas no *software Matlab* enquanto as restantes foram calculadas a partir dos desenvolvimentos apresentados anteriormente (Equação 3.5 – 3.14), com auxílio do *Excel*.

3.2.3 ESTUDO COMPARATIVO

A Tabela 3.4 compara as duas cartas tradicionais para controlo da dispersão, R e S , com a nova carta proposta $\ln(S^2)$. Observa-se que, quanto maior a dimensão da amostra, mais “Normalizada”

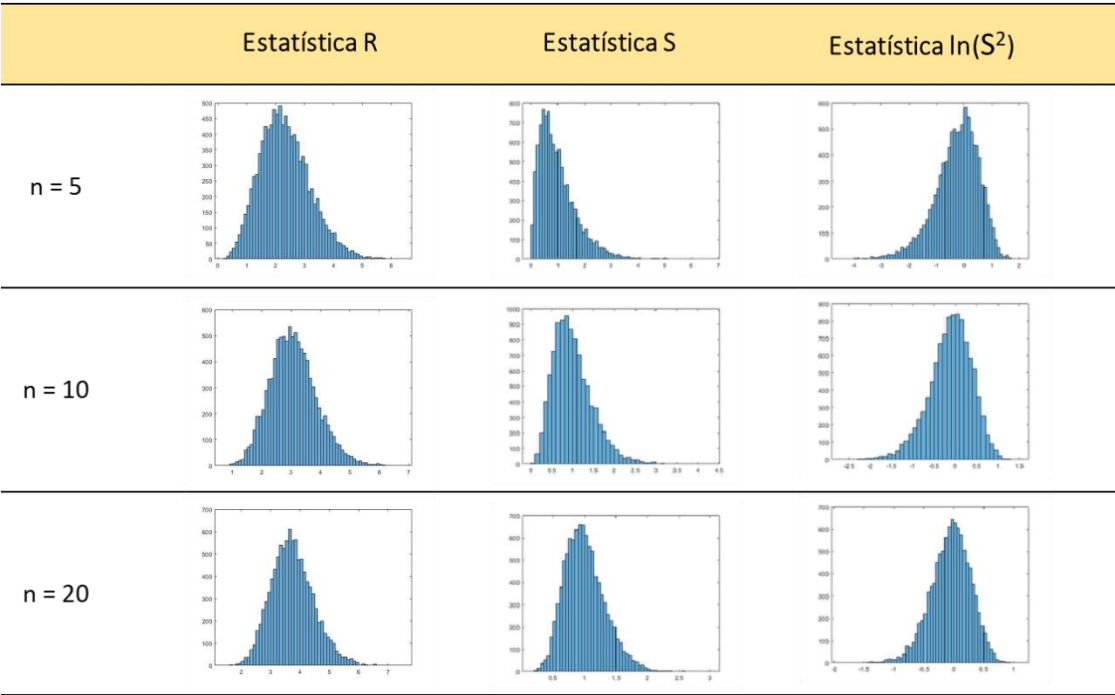
é a distribuição, e que, mesmo não sendo muito evidente na carta R , a carta S apresenta visualmente um comportamento não-Normal.

É ainda de notar que ao invés de R e S , a distribuição de $\ln(S^2)$ apresenta menor “não-Normalidade” e a cauda à esquerda é mais acentuada.

Assim, para o controlo da dispersão, torna-se profícua a utilização da carta $\ln(S^2)$, em detrimento das cartas tradicionais, pois, mesmo não sendo perfeitamente Normal, apresenta os parâmetros para a sua construção mais aproximados da realidade.

Os valores das constantes G_1 , G_2 , G_3 e G_4 foram determinados tendo em conta a dimensão das amostras e o efeito da não-Normalidade da variável $\ln(S^2)$. O efeito desta não-Normalidade foi tido em conta no cálculo das constantes obtidas pela simulação desenvolvida em *Matlab*.

Tabela 3.4: Comparação dos histogramas entre as estatísticas R , S e $\ln(S^2)$



4 MATLAB PARA DETERMINAÇÃO DE PARÂMETROS DA CARTA DE CONTROLO $CUSUM-LN(S^2)$

Na fundamentação teórica, apresentada no Capítulo 2, foi referido que as cartas de controlo especiais são construídas a partir de parâmetros fornecidos em ábacos ou tabelas já pré-estabelecidos na literatura. No entanto, esses parâmetros apresentam apenas valores para as situações mais comuns, o que se revela limitador.

Para colmatar essa lacuna, ao longo dos últimos anos foram desenvolvidos vários algoritmos em *Matlab*, designadamente, por mestrandos de Engenharia e Gestão Industrial da *FCT/UNL*, de modo a obter uma gama mais vasta e mais precisa desses parâmetros. Os algoritmos desenvolvidos em *Matlab* foram baseados no método de obtenção de parâmetros das cartas de controlo especiais descrito por Crowder (1989) e nos princípios de simulação de Monte Carlo.

Crowder (1989) criou esta abordagem de modo a obter valores de ARL muito próximos do valor real. Para isso, é necessário um elevado número de simulações para que o resultado seja preciso o que pode tornar esta atividade morosa. No entanto, é uma abordagem transversal a todas as cartas de controlo sendo apenas necessário alterar algumas funções no algoritmo.

Os princípios de simulação de Monte Carlo são bastante utilizados para resolução de problemas de natureza estatística. De uma forma simplista, são métodos com o objetivo de resolver problemas com alta precisão, em que variáveis aleatórias são simuladas um elevado número de vezes.

Após a obtenção de todos os resultados por parte dos algoritmos é necessário proceder ao tratamento dos mesmos, efetuado num ficheiro de *Excel*, onde se obtêm curvas polinomiais que representam, de uma forma bastante satisfatória, os valores obtidos.

Posto isto, a metodologia utilizada neste capítulo, utilizada por Nogueira (2018), engloba os seguintes passos:

1. Determinar os parâmetros (k, h) que produzem os valores de $ARL_{Em\ Controlo}$ desejados;
2. Determinar $ARL_{Fora\ de\ Controlo}$ para os parâmetros definidos em 1., para os desvios δ relevantes;
3. Escolher os pares (k, h) que minimizam $ARL_{Fora\ de\ Controlo}$, através de uma análise de sensibilidade.

Ao longo deste capítulo é explicada a metodologia associada aos algoritmos bem como os resultados obtidos e tratados em *Excel*.

4.1 CARTA $CUSUM-\ln(S^2)$

A carta $CUSUM-\ln(S^2)$ é utilizada quando se pretendem estudar alterações da variância do processo, caso aumente ou diminua. O aumento da variância (δ_C) significa que o processo está a deteriorar-se sendo necessárias medidas corretivas. Caso contrário (δ_D), verifica-se uma melhoria no processo.

Para estudar os aumentos ou as reduções da variância do processo, são desenvolvidos dois algoritmos distintos em *Matlab*, um para os aumentos e outro para os decréscimos. Nesta dissertação apenas será estudado o aumento da variância do processo e, por sua vez, para cada fase apenas será utilizado um algoritmo.

Este estudo tem por base o trabalho realizado por Nogueira (2018) com o objetivo da melhoria e uniformização de parâmetros da carta $CUSUM-\ln(S^2)$ para diferentes dimensões de amostras.

A necessidade deste estudo prende-se, essencialmente, com o facto de se ter detetado que alguns pares (k, h) dos parâmetros da carta $CUSUM-\ln(S^2)$ evidenciam imprecisões não aceitáveis. Acredita-se que esta deficiência tem por base um pequeno erro nas simulações realizadas por Afonso (2012) e Cardoso (2016). Esta situação verifica-se nos valores dos pares (k, h) para a gama 1,1 – 1,5 de alteração δ_C .

O processo de obtenção de parâmetros para as cartas $CUSUM-\ln(S^2)$ passa por 3 fases distintas. O objetivo da fase 1 é a obtenção de vários valores de $ARL_{EC \text{ Simulado}}$ a partir de várias combinações dos parâmetros k_C (correspondente ao valor de referência para detetar um aumento δ_C do desvio padrão do processo) e h_C (referente ao limite de controlo para detetar um aumento δ_C do desvio de padrão do processo). Esses valores serão utilizados na fase 2 na qual são filtrados todos os valores $ARL_{EC \text{ Simulado}}$ para obtenção apenas dos ARL_{EC} desejados. Na fase 3 são calculados todos os $ARL_{FC \text{ Simulado}}$ para todas as combinações de (k_C, h_C) , com o seu respetivo $ARL_{EC \text{ Simulado}}$, obtidas na fase anterior e são escolhidas apenas as combinações que minimizam o $ARL_{FC \text{ Simulado}}$.

Posto isto, foram estudados os seguintes cenários para os aumentos da variância do processo (C – aumentos):

- Dimensões da amostra: $n = \{4, 5, 6, 7, 8\}$;
- Valor de referência: $k_C = [0,001; 0,05; 0,1; 0,15; 0,2; 0,25; 0,3; 0,35; 0,4; 0,45; 0,5; 0,55; 0,6; 0,65; 0,7; 0,8; 0,9; 1,0]$
- Limite de controlo: $h_C = [0,1; 0,2; 0,25; 0,3; 0,35; 0,4; 0,45; 0,5; 0,6; 0,65; 0,7; 0,75; 0,8; 0,85; 0,9; 0,95; 1,0; 1,1; 1,2; 1,3; 1,4; 1,5; 1,6; 1,7; 1,8; 1,9; 2,0; 2,5; 3,0; 3,5; 4,0; 4,5; 5,0]$;

- ARL quando o processo está em controlo: $ARL_{EC} = \{100, 250, 370, 500, 1000\}$.
- Aumento do desvio padrão do processo que se quer detetar: $\delta_C = \{1, 0; 1, 1; 1, 2; 1, 3; 1, 4; 1, 5\}$;

Para a escolha destes $ARL_{Em\ Controlo}$, foi tido em consideração o facto de as necessárias simulações serem muito demoradas, o que se levou a cingir aos casos mais comuns.

4.1.1 Metodologia da Fase 1

Nesta fase, procede-se à construção de uma tabela inicial e rudimentar, com todos os valores de $ARL_{EC\ Simulado}$ para todas as combinações de h_C e k_C . Sendo assim, o input são os valores de h_C e k_C que serão inseridos em forma de vetor no *Matlab* e o output são os vários $ARL_{EC\ Simulado}$ para todas as combinações de (k_C, h_C) . O output desta fase origina uma tabela em Excel que pode ser compreendida esquematicamente através da Tabela 4.1.

Tabela 4.1: Output em Excel representativo da Fase 1

Para cada n		h_C			
		0,1	0,2	0,25	...
k_C	0,001	$ARL_{EC\ Simulado}$	$ARL_{EC\ Simulado}$	$ARL_{EC\ Simulado}$...
	0,05	$ARL_{EC\ Simulado}$	$ARL_{EC\ Simulado}$	$ARL_{EC\ Simulado}$...
	0,1	$ARL_{EC\ Simulado}$	$ARL_{EC\ Simulado}$	$ARL_{EC\ Simulado}$...

O algoritmo começa por percorrer primeiro todos os valores de h_C para o primeiro valor de k_C e assim sucessivamente até obter todos os valores de $ARL_{EC\ Simulado}$ para todas as combinações (k_C, h_C) , ou seja, segundo a Tabela 4.1, percorre linha a linha. O algoritmo é invocado uma vez por cada dimensão de amostra estudada (neste caso, cinco vezes, para dimensões de amostra de 4, 5, 6, 7 e 8) e por cada combinação (k_C, h_C) são realizadas 100 mil corridas. Este número foi escolhido por permitir estimar os parâmetros pretendidos com precisão. De modo a facilitar a compreensão da lógica por detrás do algoritmo, foi realizado um fluxograma que se apresenta na Figura 4.1.

Em cada corrida é gerada uma matriz $[n \times a]$, em que os dados são obtidos, aleatoriamente, da distribuição Normal Reduzida $\sim N(0, 1)$. Sobre essa matriz é calculada a variância amostral originando um vetor $1 \times a$ com o intuito de se efetuar a transformação dada pela equação 2.27, para obtenção da variável Y_t , com a inicialização do índice t . A Figura 4.2 esquematiza o raciocínio acima descrito.

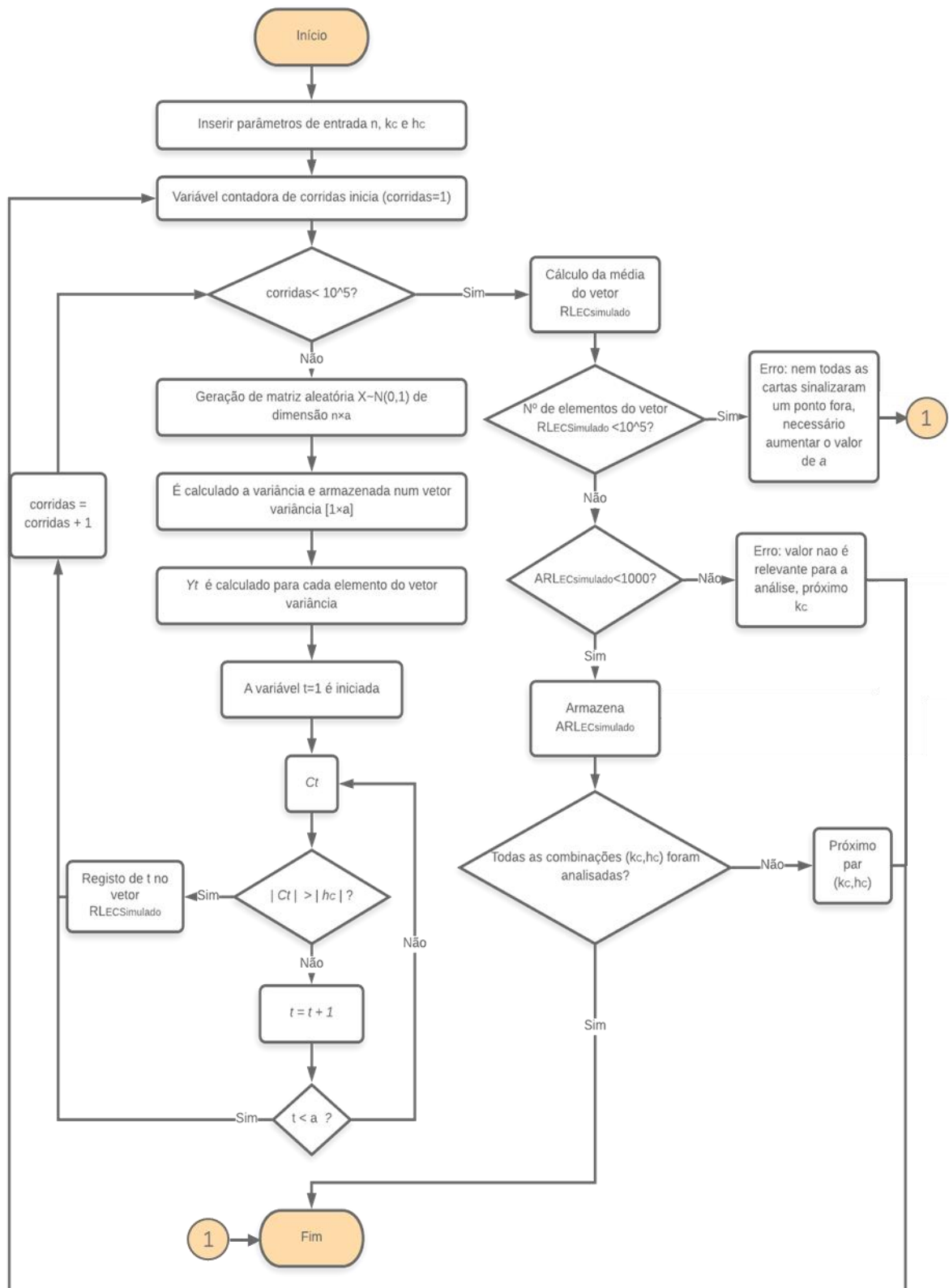


Figura 4.1: Fluxograma da Fase 1

O valor de a corresponde à dimensão do vetor suficiente para calcular os parâmetros tendo em conta os valores de k e de h e é dado por:

$$a = \min(\max(k \cdot 6 \cdot 10^3, h \cdot 5 \cdot 10^3), 1 \cdot 10^5) \quad (4.1)$$

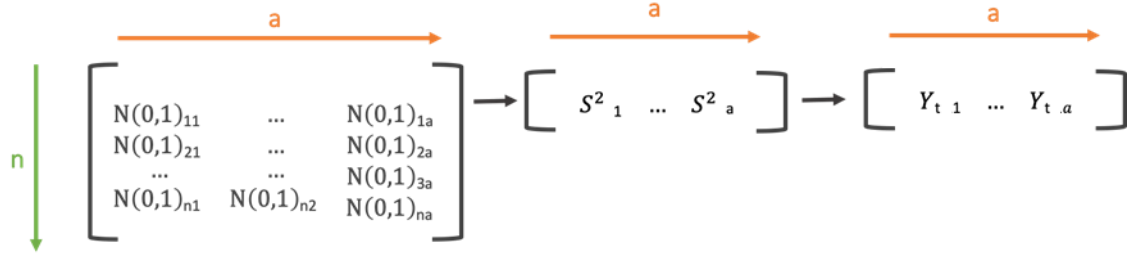


Figura 4.2: Lógica associada ao algoritmo

Em cada elemento do vetor Y_t , é calculada a variável C_t . Caso esta ultrapasse o limite de controlo (h_C), o tempo de simulação acaba e é armazenado um vetor com o RL_{EC} Simulado obtido, começando uma nova corrida. Caso contrário, o índice t é incrementado, e se for inferior ao tempo de simulação, o algoritmo dá início a uma nova corrida, não retornando nenhum valor de RL_{EC} .

No final de todas as 1×10^5 corridas, para cada combinação de (k_C, h_C) , existem dois cenários possíveis, a saber: ou a dimensão do vetor RL_{EC} Simulado é igual ao número máximo de corridas ou é inferior. No primeiro caso, quando é detetado uma situação fora dos limites de controlo antes de acabar cada corrida, o algoritmo calcula a média de todos os elementos do vetor RL_{EC} Simulado de modo a obter o ARL_{EC} Simulado. Caso a dimensão do vetor RL_{EC} Simulado seja inferior ao número de corridas, significa que os limites de controlo não foram atingidos em todas as corridas, ou seja, não se obteve um RL_{EC} Simulado em todas elas. Como tal, o algoritmo revela um erro e será necessário aumentar o tempo de simulação (a) de modo a contemplar algum ponto fora dos limites de controlo em todas elas.

Caso o ARL_{EC} Simulado seja superior a 1000, é novamente considerado erro e passa imediatamente para o próximo valor de k_C . Isto deve-se ao facto do valor máximo ARL_{EC} pretendido ser igual a 1000, assim os valores são filtrados e o tempo de simulação é reduzido.

Este processo é feito até serem analisadas todas as combinações (k_C, h_C) e se obterem todos os ARL_{EC} Simulado para todas as combinações.

4.1.2 Metodologia da Fase 2

Concluída a fase 1, é necessário filtrar os valores de $ARL_{EC} \text{ Simulado}$ de modo a obter apenas os ARL_{EC} iguais a 100, 250, 370, 500 e a 1000. O input desta fase será a tabela em *Excel* obtida na fase anterior com todos os valores de $ARL_{Médio Simulado}$ para todas as combinações de h_C e k_C .

O algoritmo fixa os valores de k_C e faz variar os valores de h_C de modo a obter os valores de ARL_{EC} pretendidos. Sendo assim, o output desta fase será uma tabela em *Excel* com os valores de h em função de ARL_{EC} e de k_C (Tabela 4.2). Este algoritmo é invocado 25 vezes, uma vez para cada tipo de ARL_{EC} e outra por cada amostra.

Tabela 4.2: Output em Excel representativo da Fase 2

Para cada n	k_C			
	0,001	0,05	0,1	...
ARL	h_C	h_C	h_C	...

O objetivo desta fase será encontrar os valores de h_C em função de k_C que produzem os ARL_{EC} desejados com um erro inferior a $\varepsilon = 2$, ou seja, que o módulo da diferença entre o ARL_{EC} desejado e o $ARL_{EC} \text{ Simulado}$ seja inferior a 2 de modo a garantir um bom grau de fiabilidade. O fluxograma da Figura 4.3 demonstra a lógica associada ao algoritmo, de modo a facilitar a compreensão.

O algoritmo começa por ler a tabela obtida na fase 1 e recolher os valores de k_C com o valor de $ARL_{EC} \text{ Simulado}$ e calcula todas as diferenças entre o ARL_{EC} e o $ARL_{EC} \text{ Simulado}$ da tabela da fase 1, determinando o módulo da menor diferença. Caso esse módulo seja inferior a 2, que corresponde ao erro máximo desejado, o algoritmo devolve o valor de h_C correspondente ao $ARL_{EC} \text{ Simulado}$. Se o módulo da diferença for superior a 2, significa que o $ARL_{EC} \text{ Simulado}$ ainda não tem a fiabilidade desejada, pelo que se revela necessário recorrer ao método das aproximações sucessivas de Newton-Raphson de modo a determinar um h_C cujo $ARL_{EC} \text{ Simulado}$ tenha um erro inferior a 2.

Na Figura 4.4 encontra-se um exemplo representativo do método das aproximações sucessivas de Newton-Raphson, que consiste em estudar o h_C imediatamente inferior (h_{inf}) ao estudado (h_{sup}) criando um intervalo $]h_{inf}; h_{sup}[$ e calculando um $h_{médio}$ ($h_{méd}$ na Figura 4.4) desse intervalo que irá conter $ARL_{EC} \text{ Simulado}$ ou não. Em caso afirmativo, o método termina, pois já se encontrou o $ARL_{EC} \text{ Simulado}$. Caso contrário, é necessário recorrer novamente ao método das aproximações até encontrar uma combinação com um erro inferior a 2.

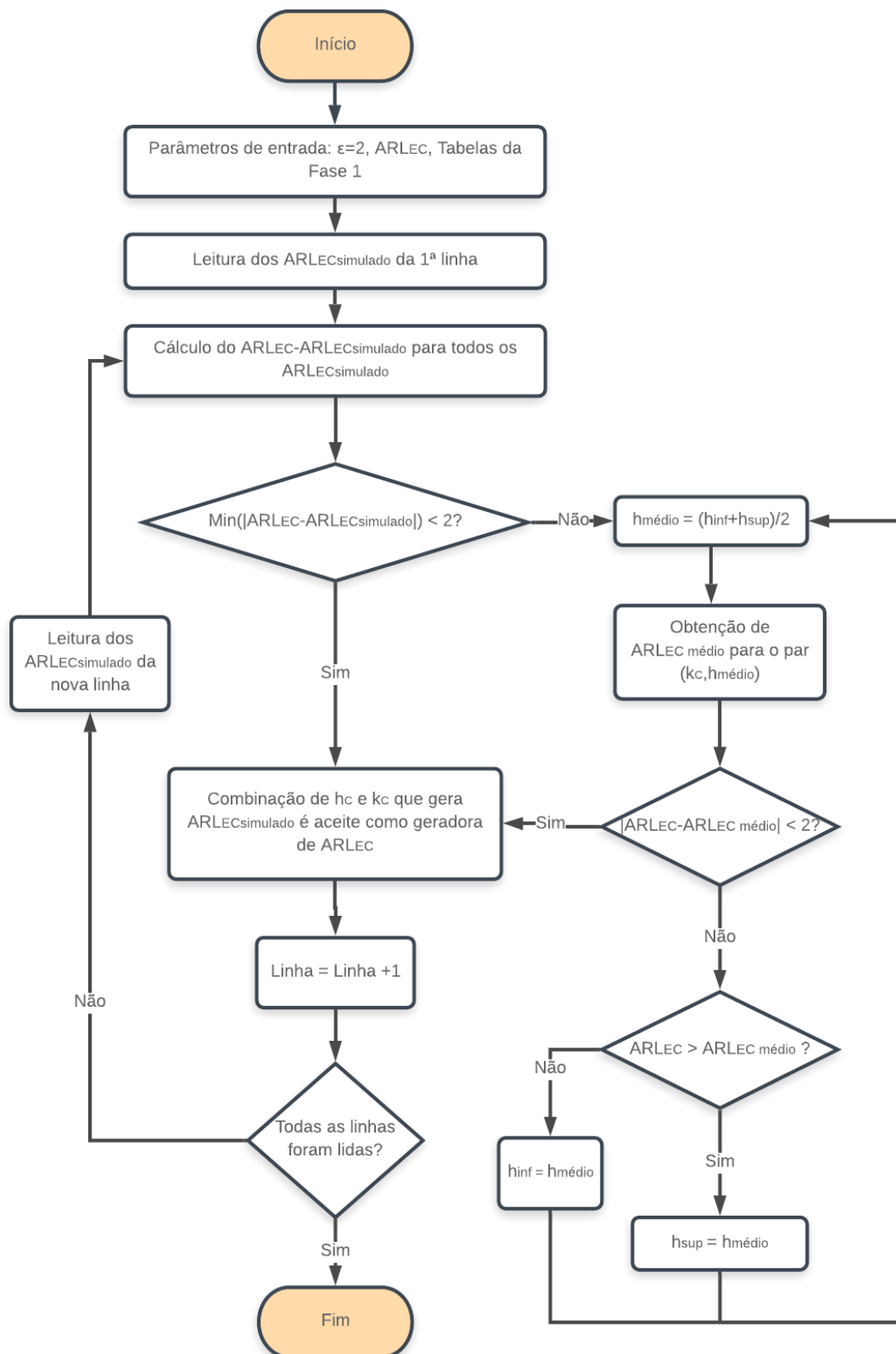


Figura 4.3: Fluxograma da Fase 2

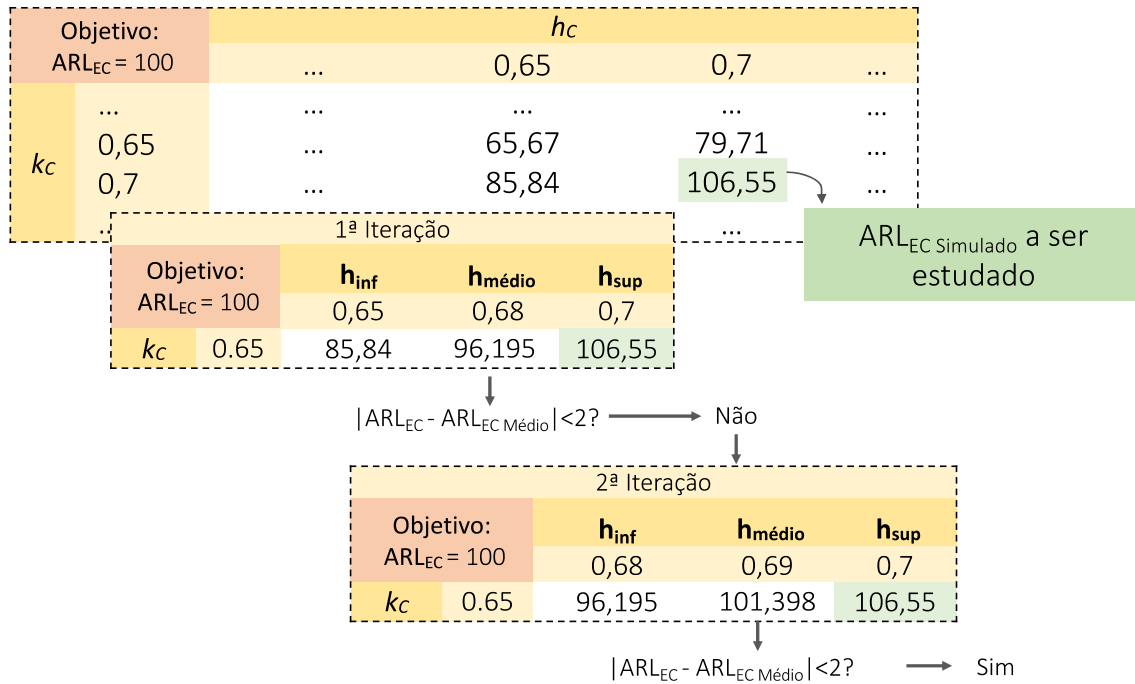


Figura 4.4: Método das aproximações sucessivas

4.1.3 Metodologia da Fase 3

Esta é a terceira e derradeira fase do presente estudo. Nesta fase será estudado o comportamento das combinações de k_c , h_c , com o seu respetivo $ARL_{EC\ Simulado}$, obtidas na fase anterior, quando se faz aumentar o desvio padrão do processo (δ_c). O seu objetivo será a obtenção dos melhores pares de combinações que produzam o $ARL_{FC\ Simulado}$ mínimo.

Os *inputs* desta fase serão as tabelas obtidas na fase 2 e os aumentos do desvio padrão que se pretendem analisar ($\delta_c = \{1,0; 1,1; 1,2; 1,3; 1,4; 1,5\}$). O output será a combinação de k_c , h_c e ARL_{EC} que produzem o menor ARL_{FC} , demonstrado na Tabela 4.3.

Tabela 4.3: Output em Excel representativo da Fase 3

Para cada n		δ_c				
		1,1	1,2	1,3	1,4	1,5
ARL	k_c	k_c	k_c	k_c	k_c	k_c
	h_c	h_c	h_c	h_c	h_c	h_c
	ARL_{FC}	ARL_{FC}	ARL_{FC}	ARL_{FC}	ARL_{FC}	ARL_{FC}

O algoritmo começa por fazer combinar todos os valores de k_c e h_c , obtidos na fase anterior, com os δ_c definidos nesta fase. Calcula para cada combinação $((k_c, h_c), \delta_c)$ todos os valores de

ARL_{FC} Simulado e seleciona apenas as combinações que minimizem o ARL_{FC} Simulado. A lógica associada à determinação do ARL_{FC} Simulado é semelhante à da fase 1 quando da determinação do ARL_{EC} Simulado, a diferença consiste apenas no seguinte: na fase 1, era gerado um vetor $X \sim N(0, 1)$ e nesta fase é gerado um vetor em que $X_\delta = X + \delta$, que já contém o desvio associado ao desvio padrão. Essa lógica é apresentada na Figura 4.5.

O algoritmo é invocado para cada tabela de ARL_{EC} obtida na fase 2 e para cada número de amostra, ou seja, 25 vezes.

4.2 RESULTADOS

Tendo em conta que o output dos três algoritmos, um para cada fase, origina uma vasta gama de dados, é imprescindível uma boa organização para a recolha e tratamento dos mesmos para que estes possam ser acrescentados ao *software*.

É de relembrar que se recolheram parâmetros da carta $CUSUM-\ln(S^2)$ para os aumentos na dispersão do processo, para dimensões de amostras iguais a 4, 5, 6, 7 e 8 e para ARL_{EC} correspondentes a 100, 250, 370, 500 e 1000.

Posto isto, neste subcapítulo são apresentados os resultados obtidos nas fases 2 e 3, os ábacos com as respetivas regressões polinomiais de 5º grau para cada ARL_{EC} e as tabelas obtidas para as cinco dimensões de amostras, respetivamente. Salienta-se que as regressões polinomiais são válidas dentro de um determinado intervalo, assinalado abaixo de cada regressão. As regressões polinomiais obtidas na fase 2, na fase 3 e as tabelas obtidas na fase 3 complementarão o *software*. Os resultados da fase 1 não são apresentados pois constituem uma tabela rudimentar com dados em bruto que apenas serviram de suporte para a realização da fase subsequente.

O coeficiente de determinação (R^2) corresponde ao grau percentual da qualidade de ajuste do modelo estatístico, varia entre 0 e 1. Quanto maior é o R^2 , melhor ajustamento é conseguido. Nas regressões polinomiais calculadas, para cada valor de ARL_{EC} , o coeficiente de determinação não varia muito, apresentando um valor de 0,9999, isto significa que 99,99% dos valores das combinações (h_C, k_C) conseguem ser obtidos a partir da regressão polinomial calculada.

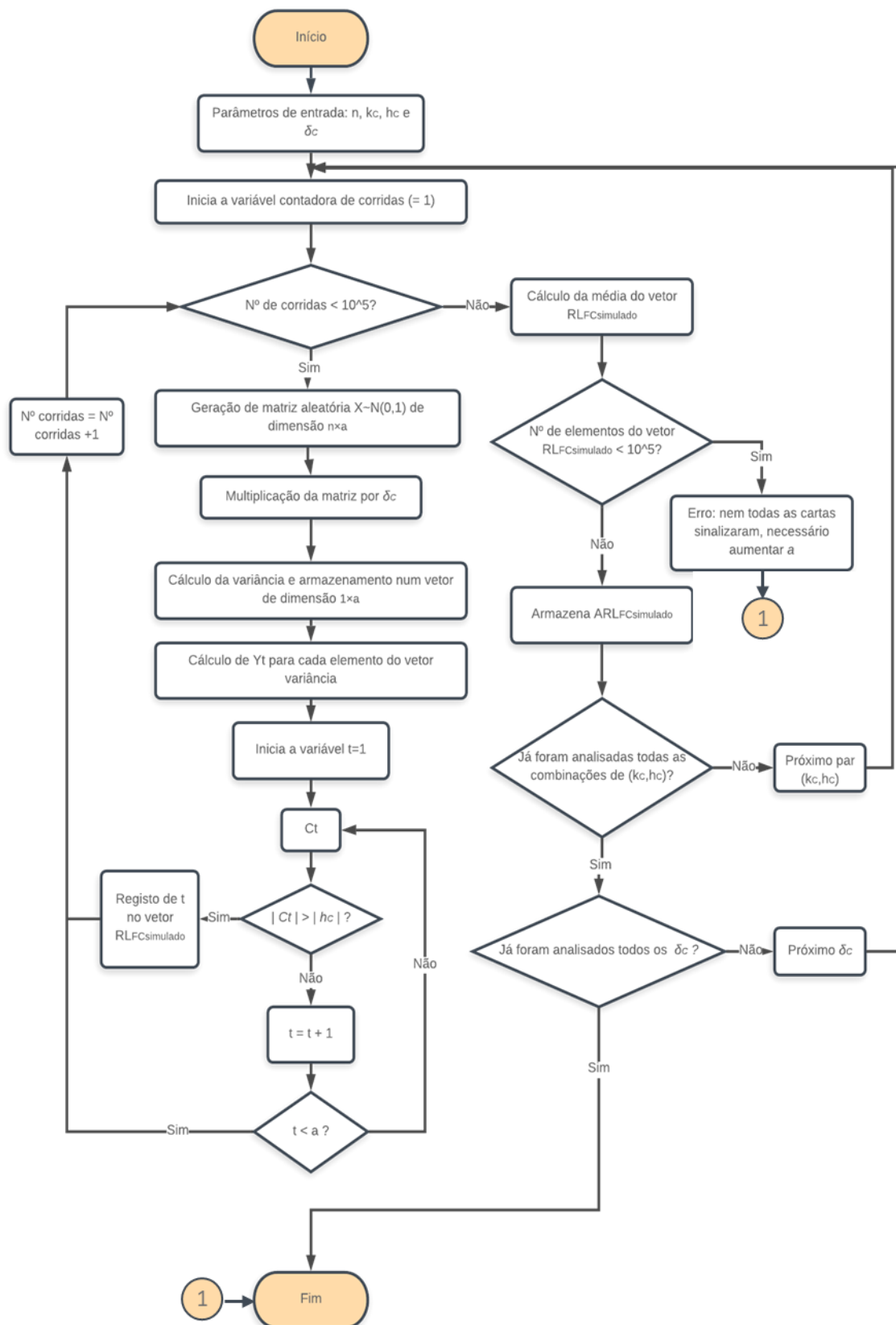


Figura 4.5: Fluxograma da Fase 3

4.2.1 RESULTADOS FASE 2

Os pontos na Figura 4.6, Figura 4.7, Figura 4.8, Figura 4.9 e Figura 4.10 correspondem aos valores obtidos a partir da segunda fase de simulação em *Matlab*, para várias dimensões de amostras e a linha que os une corresponde à regressão polinomial calculada. A regressão polinomial corresponde ao comportamento dos pares (h_C, k_C) , para cada valor de $ARL_{Em\ Controlo}$, para combinações não tratadas nesta dissertação. Torna-se possível obter um valor muito aproximado de todas as combinações de (h_C, k_C) . Salienta-se que para cada regressão polinomial está associado um intervalo de k_C em que pode ser aplicada, desde logo porque, caso contrário, poderiam ser originadas combinações de (h_C, k_C) que não corresponderiam à lógica estudada por Chang e Gan (1995), o que prejudicaria o estudo desta carta.

Tanto as tabelas obtidas como estas regressões polinomiais calculadas têm o intuito de contemplarem o *software* desenvolvido na presente dissertação, aumentando a gama de valores disponível, não contendo apenas os valores obtidos a partir das simulações em *Matlab*, mas também as aproximações.

Em todas as regressões polinomiais apresentadas seguidamente, os valores de x e y correspondem aos valores de k_C e h_C , respetivamente.

Para $n = 4$

A Figura 4.6 demonstra o comportamento das combinações (h_C, k_C) , para cada valor de ARL_{EC} para a dimensão de amostra igual a 4. As regressões polinomiais, de cada ARL_{EC} , num intervalo de $x = [0,001;1]$, são dadas por:

$$ARL_{EC} = 100: y = -2E-06x^5 + 8E-05x^4 - 0,0017x^3 + 0,0274x^2 - 0,3667x + 3,0846; R^2 = 0,9998$$

$$ARL_{EC} = 250 y = -2E-06x^5 + 0,0001x^4 - 0,0025x^3 + 0,0416x^2 - 0,5173x + 4,0714; R^2 = 0,9999$$

$$ARL_{EC} = 370 y = -2E-06x^5 + 0,0001x^4 - 0,0029x^3 + 0,0483x^2 - 0,5845x + 4,5056; R^2 = 0,9999$$

$$ARL_{EC} = 500 y = -2E-06x^5 + 0,0001x^4 - 0,0032x^3 + 0,0537x^2 - 0,6392x + 4,8449; R^2 = 0,9999$$

$$ARL_{EC} = 1000 y = -2E-06x^5 + 0,0001x^4 - 0,0034x^3 + 0,0616x^2 - 0,7508x + 5,621; R^2 = 0,9999$$

Para $n = 5$

As regressões polinomiais de cada curva de ARL_{EC} , representadas na Figura 4.7, no intervalo de $x = [0,001;1]$, para a dimensão de amostra de 5, são dadas por:

$$ARL_{EC} = 100 y = -5E-07x^5 + 2E-05x^4 - 0,0011x^3 + 0,0284x^2 - 0,4007x + 2,9707; R^2 = 0,9999$$

$$ARL_{EC} = 250 y = -3E-06x^5 + 0,0002x^4 - 0,0038x^3 + 0,0585x^2 - 0,6135x + 3,9934; R^2 = 0,9999$$

$$ARL_{EC} = 370 \quad y = -4E-06x^5 + 0,0002x^4 - 0,0047x^3 + 0,0701x^2 - 0,7042x + 4,4425; \quad R^2 = 0,9999$$

$$ARL_{EC} = 500 \quad y = -4E-06x^5 + 0,0002x^4 - 0,0053x^3 + 0,0781x^2 - 0,77x + 4,7813; \quad R^2 = 0,9999$$

$$ARL_{EC} = 1000 \quad y = -5E-06x^5 + 0,0003x^4 - 0,0072x^3 + 0,1019x^2 - 0,9492x + 5,6155; \quad R^2 = 0,9999$$

Para $n = 6$

A Figura 4.8 apresenta as regressões polinomiais correspondentes a cada ARL_{EC} e as suas equações, para a dimensão de amostra igual a 6, num intervalo de $x = [0,001;1]$, são dadas por:

$$ARL_{EC} = 100 \quad y = -2E-06x^5 + 9E-05x^4 - 0,0024x^3 + 0,0411x^2 - 0,4543x + 2,8836; \quad R^2 = 0,9999$$

$$ARL_{EC} = 250 \quad y = -4E-06x^5 + 0,0002x^4 - 0,0052x^3 + 0,0745x^2 - 0,6932x + 3,9177; \quad R^2 = 0,9999$$

$$ARL_{EC} = 370 \quad y = -5E-06x^5 + 0,0003x^4 - 0,0067x^3 + 0,0912x^2 - 0,8043x + 4,3786; \quad R^2 = 0,9999$$

$$ARL_{EC} = 500 \quad y = -6E-06x^5 + 0,0003x^4 - 0,0077x^3 + 0,1039x^2 - 0,8941x + 4,7454; \quad R^2 = 0,9999$$

$$ARL_{EC} = 1000 \quad y = -8E-06x^5 + 0,0004x^4 - 0,0103x^3 + 0,1349x^2 - 1,1051x + 5,5952; \quad R^2 = 0,9999$$

Para $n = 7$

Para a dimensão de amostra de 7, as regressões polinomiais de cada ARL_{EC} , apresentadas pela Figura 4.9, num intervalo de $x = [0,001;1]$, são dadas por:

$$ARL_{EC} = 100 \quad y = -6E-06x^5 + 0,0003x^4 - 0,0056x^3 + 0,0667x^2 - 0,5444x + 2,8596; \quad R^2 = 0,9999$$

$$ARL_{EC} = 250 \quad y = -5E-06x^5 + 0,0003x^4 - 0,0066x^3 + 0,0902x^2 - 0,7666x + 3,8656; \quad R^2 = 0,9999$$

$$ARL_{EC} = 370 \quad y = -7E-06x^5 + 0,0004x^4 - 0,0088x^3 + 0,1135x^2 - 0,9052x + 4,3469; \quad R^2 = 0,9999$$

$$ARL_{EC} = 500 \quad y = -8E-06x^5 + 0,0004x^4 - 0,0099x^3 + 0,1269x^2 - 0,9987x + 4,7105; \quad R^2 = 0,9999$$

$$ARL_{EC} = 1000 \quad y = -1E-05x^5 + 0,0006x^4 - 0,0135x^3 + 0,1671x^2 - 1,247x + 5,5829; \quad R^2 = 0,9999$$

Para $n = 8$

Neste caso, em que a dimensão da amostra é igual a 8, as regressões polinomiais, visualizadas pela Figura 4.10, não têm o mesmo intervalo de k_c , todos os ARL_{EC} possuem um intervalo de $x = [0,001;1]$, com exceção de $ARL_{EC} = 1000$ que apresenta um intervalo de $x = [0,001;0,9]$. As regressões polinomiais são dadas por:

$$ARL_{EC} = 100 \quad y = -8E-06x^5 + 0,0004x^4 - 0,0076x^3 + 0,0856x^2 - 0,6196x + 2,8536; \quad R^2 = 0,9999$$

$$ARL_{EC} = 250 \quad y = -9E-06x^5 + 0,0005x^4 - 0,0102x^3 + 0,1201x^2 - 0,8743x + 3,8549; \quad R^2 = 1$$

$$ARL_{EC} = 370 \quad y = -8E-06x^5 + 0,0005x^4 - 0,0105x^3 + 0,1314x^2 - 0,9841x + 4,3065; \quad R^2 = 0,9999$$

$$ARL_{EC} = 500 \quad y = -9E-06x^5 + 0,0005x^4 - 0,012x^3 + 0,1488x^2 - 1,0916x + 4,6748; \quad R^2 = 0,9999$$

$$ARL_{EC} = 1000 \quad y = -1E-05x^5 + 0,0007x^4 - 0,0164x^3 + 0,1958x^2 - 1,3697x + 5,5705; \quad R^2 = 0,9999$$

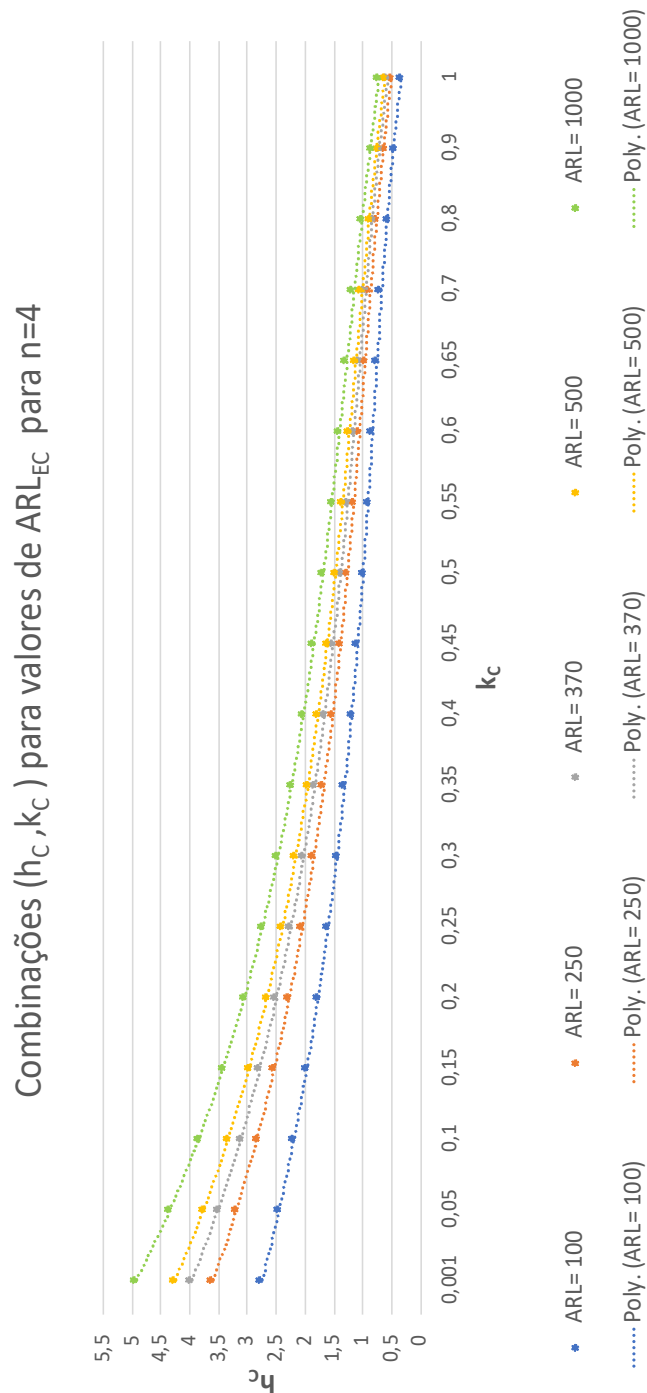


Figura 4.6: Combinacões de h_c e k_c para valores de ARL_{EC} quando $n = 4$

Combinações (h_c, k_c) para valores de ARL_{EC} para $n=5$

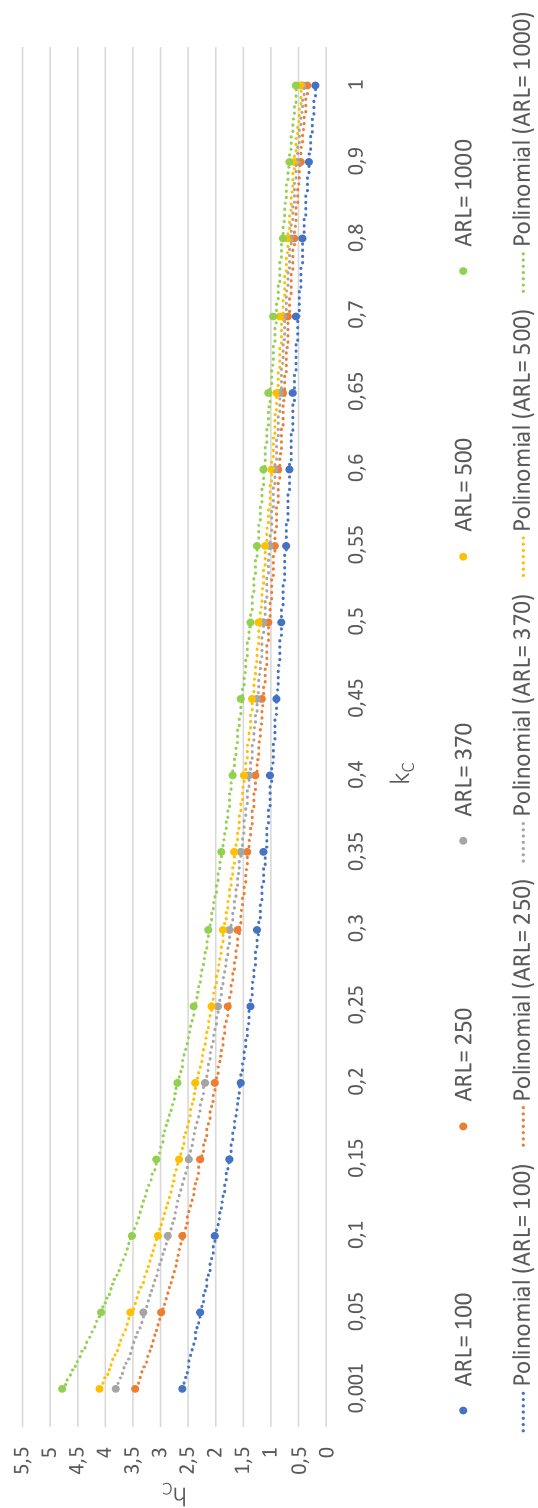


Figura 4.7: Combinações de h_c e k_c para valores de ARL_{EC} quando $n = 5$

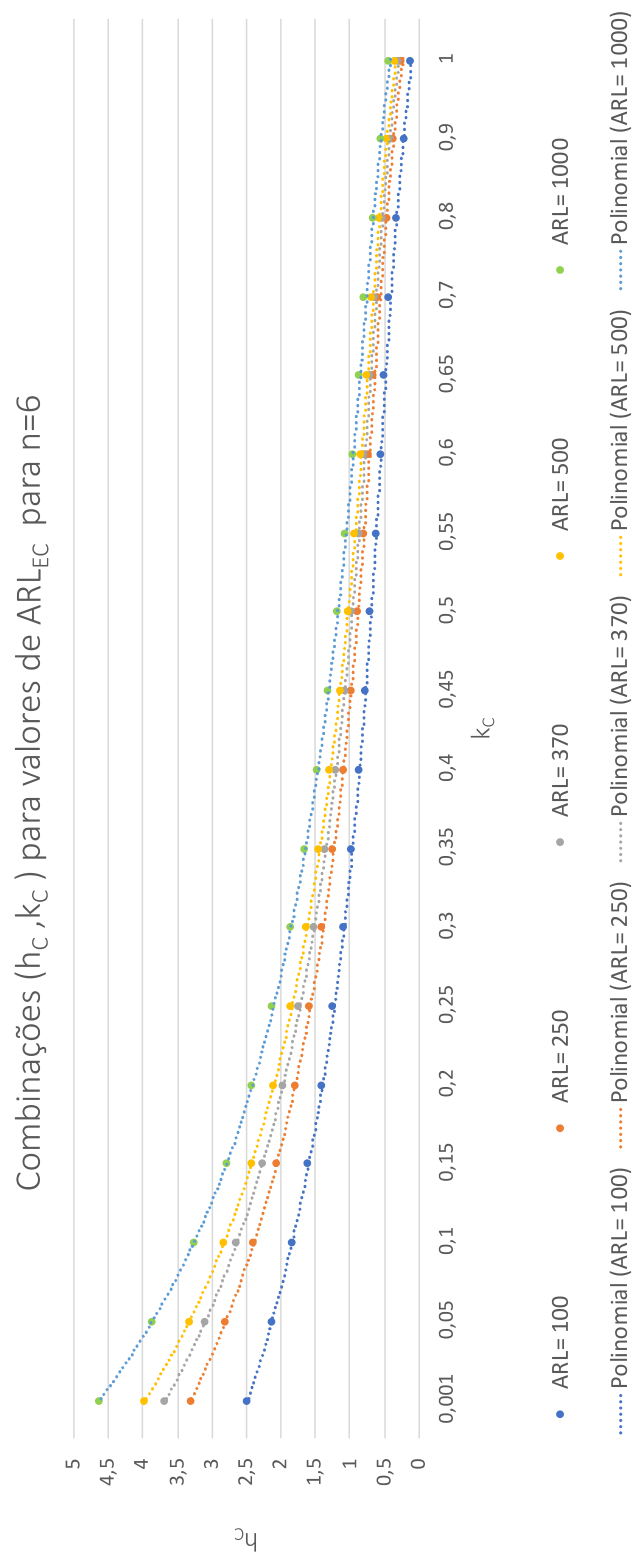


Figura 4.8: Combinações de h_c e k_c para valores de ARL_{EC} quando $n = 6$

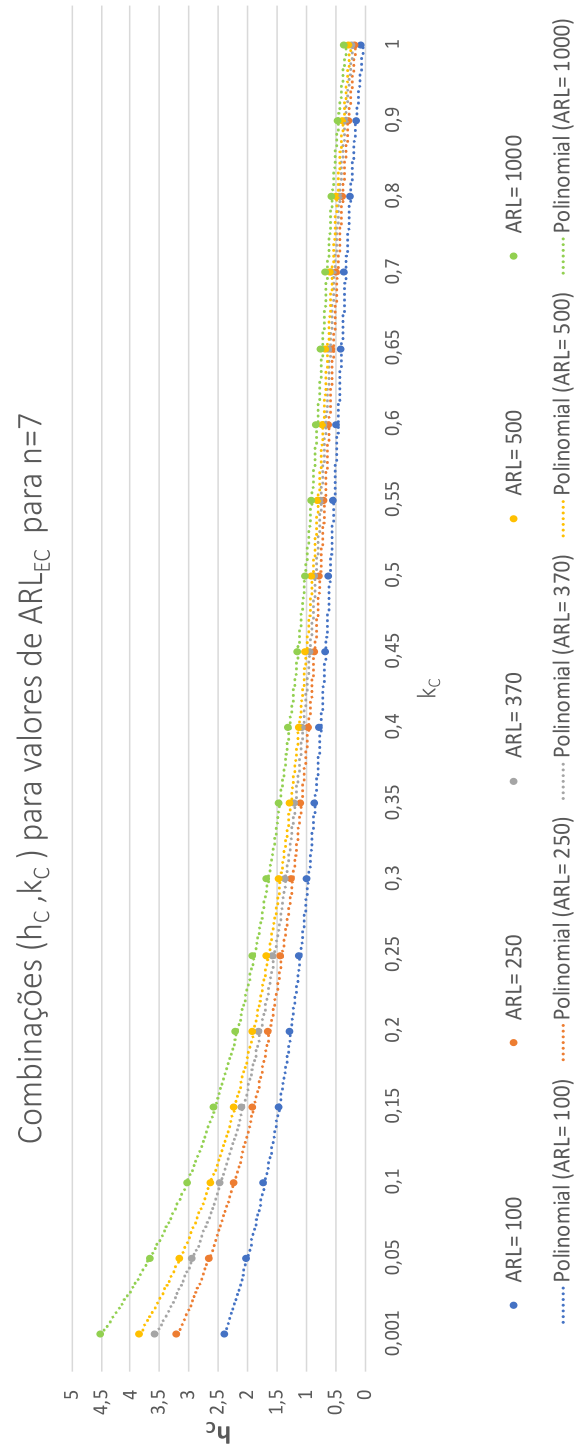


Figura 4.9: Combinações de h_c e k_c para valores de ARL_{EC} quando $n = 7$

Combinações (h_c, k_c) para valores de ARL_{EC} para $n=8$

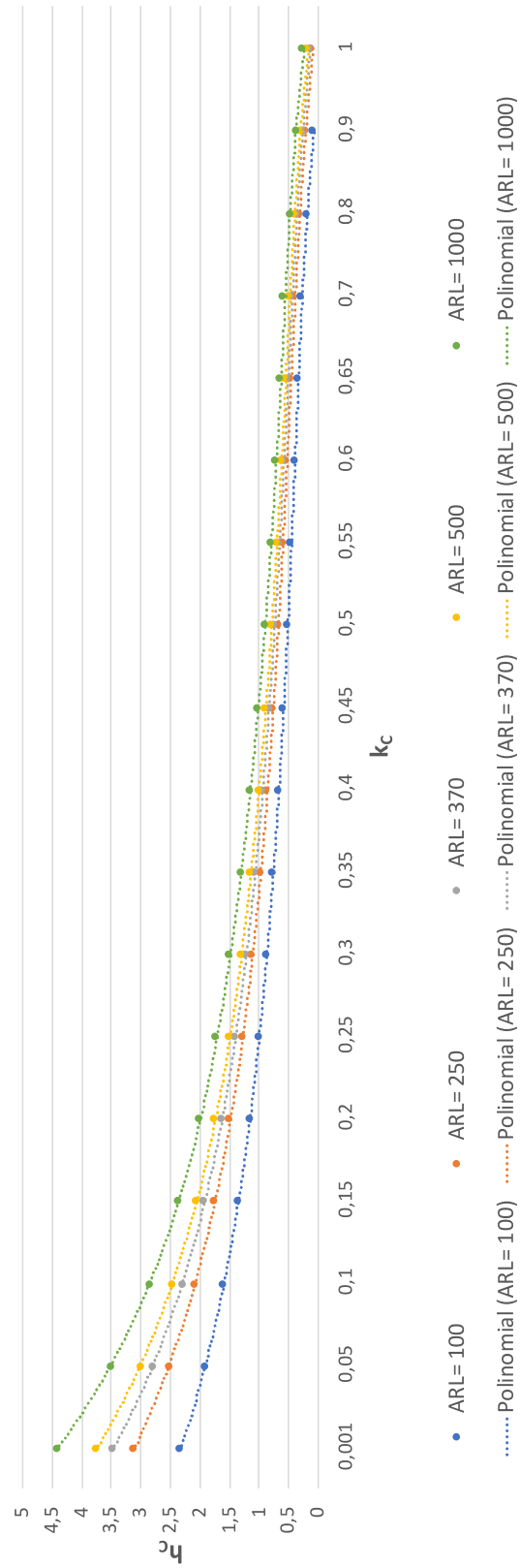


Figura 4.10: Combinações de h_c e k_c para valores de ARL_{EC} quando $n = 8$

4.2.2 RESULTADOS FASE 3

A Tabela 4.4, Tabela 4.5, Tabela 4.6, Tabela 4.7 e Tabela 4.8 correspondem aos valores obtidos a partir da terceira fase de simulação em *Matlab*, para várias dimensões de amostras. Para cada tabela, são calculadas regressões polinomiais da relação de k_C e δ_C que, juntamente com os resultados obtidos na fase 2, contemplam o *software* desenvolvido na presente dissertação, aumentando a gama de valores disponível, não contendo apenas os valores obtidos a partir das simulações em *Matlab*, mas também as aproximações.

Estas duas regressões (da fase 2 e da fase 3) estão relacionadas: (i) as regressões da fase 2 correspondem ao comportamento dos pares (h_C, k_C) , para cada valor de $ARL_{Em\ Controla}$ enquanto que (ii) as regressões da fase 3 correspondem ao comportamento de k_C e δ_C . Deste modo, é possível relacionar todas as variáveis com apenas estas duas regressões polinomiais.

Um exemplo do cálculo da regressão linear para a combinação de k_C e δ_C está presente na Figura 4.11 para a dimensão de amostra de 8, em que o valor de x corresponde a δ_C e o de y a k_C . Procedeu-se à mesma lógica para todas as amostras.

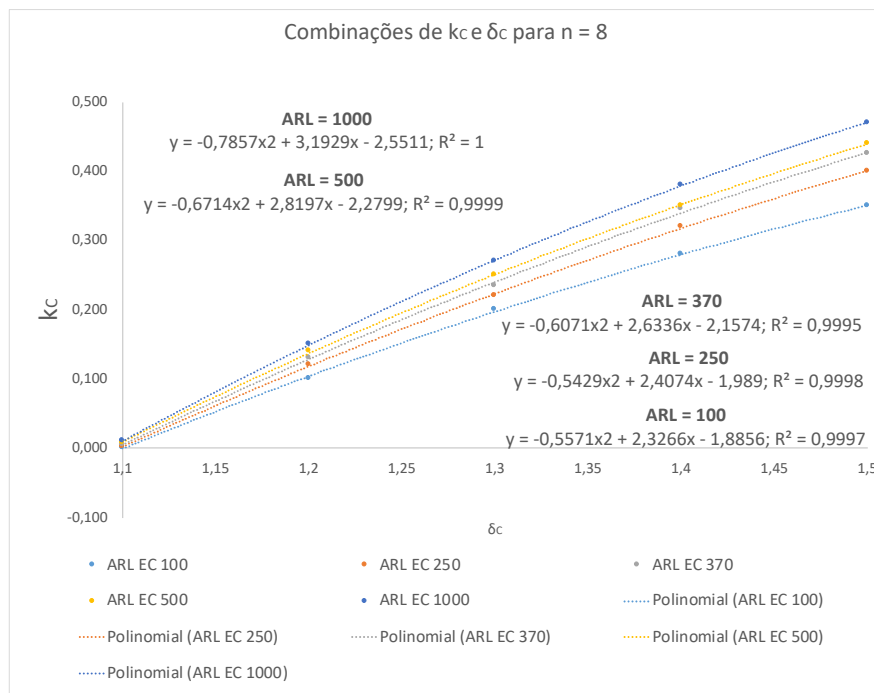


Figura 4.11: Combinação de k_C com δ_C para $n = 8$

Apesar de, na presente dissertação, só se tratar valores de δ_C entre 1,1 e 1,5, as regressões polinomiais calculadas também tiveram em conta outros parâmetros calculados posteriormente por outros estudos realizados.

Para $n = 4$

A partir da Tabela 4.4 é possível extrair apenas a relação de k_C e δ_C , para cada valor de ARL_{EC} . As regressões polinomiais para essas combinações, num intervalo de $x = [1,1;2]$, são dadas por:

$$ARL_{EC} = 1000 \quad y = -1,0348x^2 + 4,0247x - 3,1352; \quad R^2 = 0,9979$$

$$ARL_{EC} = 500 \quad y = -0,9523x^2 + 3,7537x - 2,9385; \quad R^2 = 0,9978$$

$$ARL_{EC} = 370 \quad y = -1,0189x^2 + 3,9037x - 3,028; \quad R^2 = 0,9988$$

$$ARL_{EC} = 250 \quad y = -0,9864x^2 + 3,7845x - 2,9443; \quad R^2 = 0,9965$$

$$ARL_{EC} = 100 \quad y = -0,9758x^2 + 3,7161x - 2,8868; \quad R^2 = 0,9969$$

Tabela 4.4: Resultados da Fase 3 para $n = 4$

			δ				
			1.1	1.2	1.3	1.4	1.5
n=4	ARL = 100	k_C	0,001	0,181	0,306	0,410	0,495
		h_C	2,438	2,438	1,438	0,988	0,988
		ARL_{FC}	32,472	16,235	9,832	6,828	5,112
	ARL = 250	k_C	0,002	0,195	0,321	0,428	0,515
		h_C	3,594	3,594	2,531	1,672	1,256
		ARL_{FC}	57,444	24,486	14,095	9,283	6,733
	ARL = 370	k_C	0,018	0,204	0,332	0,442	0,533
		h_C	3,969	3,969	2,781	1,831	1,506
		ARL_{FC}	72,429	28,612	16,093	10,504	7,514
	ARL = 500	k_C	0,016	0,217	0,343	0,453	0,546
		h_C	4,258	4,258	2,969	2,159	1,609
		ARL_{FC}	86,121	32,145	17,676	11,430	8,090
	ARL = 1000	k_C	0,018	0,226	0,359	0,474	0,570
		h_C	4,930	4,930	4,342	3,050	2,469
		ARL_{FC}	125,158	40,708	21,453	13,608	9,531

Para $n = 5$

As regressões polinomiais de cada curva de ARL_{EC} , para a combinação (k_C, δ_C) , obtidas a partir da Tabela 4.5, no intervalo de $x = [1,1;2]$, para a dimensão de amostra de 5, são dadas por:

$$ARL_{EC} = 1000 \quad y = -0,1404x^2 + 1,3718x - 1,3969; \quad R^2 = 0,9776$$

$$ARL_{EC} = 500 \quad y = -0,5589x^2 + 2,5651x - 2,1782; \quad R^2 = 0,9627$$

$$ARL_{EC} = 370 \quad y = -0,6249x^2 + 2,772x - 2,3467; \quad R^2 = 0,9507$$

$$ARL_{EC} = 250 \quad y = -0,7934x^2 + 3,1898x - 2,5642; \quad R^2 = 0,9702$$

$$ARL_{EC} = 100 \quad y = -0,9238x^2 + 3,5029x - 2,7209; \quad R^2 = 0,9624$$

Tabela 4.5: Resultados da Fase 3 para $n = 5$

			δ				
			1.1	1.2	1.3	1.4	1.5
n=5	ARL = 100	k_C	0,001	0,150	0,250	0,450	0,450
		h_C	2,594	1,750	1,375	0,900	0,900
		ARL_{FC}	28,177	13,436	8,106	5,613	4,184
	ARL = 250	k_C	0,002	0,050	0,300	0,350	0,450
		h_C	3,438	2,969	1,581	1,413	1,144
		ARL_{FC}	47,447	19,704	11,183	7,367	5,319
	ARL = 370	k_C	0,007	0,001	0,200	0,250	0,500
		h_C	3,805	3,805	2,195	1,944	1,127
		ARL_{FC}	58,022	22,640	12,557	8,223	5,862
	ARL = 500	k_C	0,013	0,050	0,200	0,250	0,500
		h_C	4,086	3,516	2,344	2,074	1,201
		ARL_{FC}	67,192	24,961	13,710	8,872	6,272
	ARL = 1000	k_C	0,002	0,001	0,100	0,250	0,350
		h_C	4,766	4,766	3,510	2,379	1,891
		ARL_{FC}	93,869	30,335	16,303	10,401	7,288

Para $n = 6$

As regressões polinomiais, obtidas a partir da Tabela 4.6, correspondem à combinação de k_C e δ_C , para a dimensão de amostra igual a 6. No intervalo de $x = [1,1;2]$, são dadas por

$$ARL_{EC} = 1000 \quad y = -0,8439x^2 + 3,3551x - 2,646; \quad R^2 = 0,9976$$

$$ARL_{EC} = 500 \quad y = -0,7841x^2 + 3,1443x - 2,4877; \quad R^2 = 0,9975$$

$$ARL_{EC} = 370 \quad y = -0,7561x^2 + 3,0393x - 2,4129; \quad R^2 = 0,9983$$

$$ARL_{EC} = 250 \quad y = -0,7311x^2 + 2,9484x - 2,351; \quad R^2 = 0,9976$$

$$ARL_{EC} = 100 \quad y = -0,7644x^2 + 2,9936x - 2,3448; \quad R^2 = 0,9744$$

Tabela 4.6: Resultados da Fase 3 para n = 6

			δ				
			1.1	1.2	1.3	1.4	1.5
n=6	ARL = 100	k_C	0,001	0,120	0,320	0,390	0,400
		h_C	2,469	1,825	1,075	0,856	0,856
		ARL_{FC}	24,859	11,679	6,975	4,758	3,567
	ARL = 250	k_C	0,002	0,135	0,250	0,340	0,450
		h_C	3,297	2,379	1,569	1,088	0,975
		ARL_{FC}	40,132	16,591	9,376	6,149	4,470
	ARL = 370	k_C	0,005	0,147	0,270	0,370	0,450
		h_C	3,664	3,078	1,963	1,192	1,192
		ARL_{FC}	48,259	18,868	10,429	6,831	4,884
	ARL = 500	k_C	0,010	0,155	0,290	0,390	0,470
		h_C	3,953	3,309	2,098	1,619	1,134
		ARL_{FC}	55,090	20,712	11,284	7,319	5,211
	ARL = 1000	k_C	0,012	0,160	0,310	0,410	0,490
		h_C	4,621	3,841	2,406	1,852	1,458
		ARL_{FC}	73,796	25,025	13,284	8,465	5,968

Para n = 7

Para a dimensão de amostra de 7, as regressões polinomiais para cada ARL_{EC} , baseadas na Tabela 4.7, num intervalo de $x = [1, 1; 2]$, são dadas por:

$$ARL_{EC} = 1000 \quad y = -0,8689x^2 + 3,435x - 2,7128; \quad R^2 = 0,9994$$

$$ARL_{EC} = 500 \quad y = -0,8258x^2 + 3,2841x - 2,6023; \quad R^2 = 0,9995$$

$$ARL_{EC} = 370 \quad y = -0,7928x^2 + 3,1681x - 2,5212; \quad R^2 = 0,9994$$

$$ARL_{EC} = 250 \quad y = -0,75x^2 + 3,0209x - 2,4169; \quad R^2 = 0,9996$$

$$ARL_{EC} = 100 \quad y = -0,6985x^2 + 2,8423x - 2,2878; \quad R^2 = 0,9993$$

Tabela 4.7: Resultados da Fase 3 para n = 7

			δ				
			1.1	1.2	1.3	1.4	1.5
n=7	ARL = 100	k_C	0,001	0,150	0,220	0,330	0,450
		h_C	2,375	1,450	0,963	0,750	0,663
		ARL_{FC}	22,606	10,345	6,172	4,207	3,150
	ARL = 250	k_C	0,003	0,125	0,235	0,350	0,425
		h_C	3,188	2,211	1,406	1,080	0,850
		ARL_{FC}	35,227	14,448	8,131	5,318	3,875
	ARL = 370	k_C	0,006	0,137	0,250	0,370	0,450
		h_C	3,555	2,440	1,781	1,348	0,928
		ARL_{FC}	41,873	16,255	8,982	5,884	4,225
	ARL = 500	k_C	0,010	0,150	0,265	0,385	0,470
		h_C	3,836	2,613	1,903	1,438	1,113
		ARL_{FC}	47,368	17,752	9,737	6,263	4,472
	ARL = 1000	k_C	0,011	0,160	0,280	0,400	0,490
		h_C	4,500	3,645	2,182	1,446	1,275
		ARL_{FC}	61,369	21,237	11,291	7,182	5,091

Para n = 8

Para a dimensão da amostra é igual a 8, as regressões polinomiais, baseadas na Tabela 4.8, para um intervalo de $x = [1, 1; 2]$, são dadas por:

$$ARL_{EC} = 1000 \quad y = -0,7857x^2 + 3,1929x - 2,5511; \quad R^2 = 1$$

$$ARL_{EC} = 500 \quad y = -0,6714x^2 + 2,8197x - 2,2799; \quad R^2 = 0,9999$$

$$ARL_{EC} = 370 \quad y = -0,6071x^2 + 2,6336x - 2,1574; \quad R^2 = 0,9995$$

$$ARL_{EC} = 250 \quad y = -0,5429x^2 + 2,4074x - 1,989; \quad R^2 = 0,9998$$

$$ARL_{EC} = 100 \quad y = -0,5571x^2 + 2,3266x - 1,8856; \quad R^2 = 0,9997$$

Tabela 4.8: Resultados da Fase 3 para $n = 8$

			δ				
			1.1	1.2	1.3	1.4	1.5
n=8	ARL = 100	k_C	0,001	0,100	0,200	0,280	0,350
		h_C	1,900	1,150	0,863	0,663	0,663
		ARL_{FC}	21,018	9,376	5,516	3,777	2,840
	ARL = 250	k_C	0,002	0,120	0,220	0,320	0,400
		h_C	3,094	2,070	1,275	0,966	0,850
		ARL_{FC}	31,724	12,866	7,183	4,726	3,452
	ARL = 370	k_C	0,005	0,130	0,235	0,345	0,425
		h_C	3,453	2,281	1,400	0,928	0,928
		ARL_{FC}	37,234	14,429	7,929	5,170	3,706
	ARL = 500	k_C	0,008	0,140	0,250	0,350	0,440
		h_C	3,731	2,445	1,741	1,294	0,875
		ARL_{FC}	41,794	15,615	8,521	5,523	3,936
	ARL = 1000	k_C	0,010	0,150	0,270	0,380	0,470
		h_C	4,395	2,828	1,997	1,293	1,002
		ARL_{FC}	53,016	18,568	9,891	6,292	4,451

5 SOFTWARE DE APOIO À IMPLEMENTAÇÃO DAS CARTAS DE CONTROLO

Foi elaborado um *software* por Nogueira (2018) que serve de repositório de todos os parâmetros calculados por Alves (2009), Afonso (2012), Nogueira (2015), Cardoso (2016) e Nogueira (2018) para as cartas *CUSUM* e *EWMA*, tanto para o controlo da média como da dispersão, considerando vários valores de ARL_{EC} .

Este *software* facilita a consulta dos parâmetros com uma gama de valores superior e evita eventuais erros na consulta dos ábacos desenvolvidos por Chang & Gan (1995), Crowder (1989) e Gan (1991). É destinado aos alunos do Mestrado Integrado em Engenharia e Gestão Industrial da FCT/UNL e a todos os profissionais da área da Qualidade que implementam este tipo de cartas.

Esta dissertação visou a atualização do *software* criado por Nogueira (2018) englobando, para além de todos os parâmetros obtidos anteriormente, todos os novos parâmetros obtidos na carta $CUSUM-In(S^2)$ bem como as novas constantes que apoiam a construção dos limites de controlo da nova carta desenvolvida, a carta $ln(S^2)$.

Para a construção e modificação deste *software*, foram necessárias duas plataformas complementares:

- Eclipse: baseado em linguagem *Java*, o *Eclipse* representa toda a lógica do programa. É neste *software* onde toda a “escrita” é feita e onde todos os inputs das cartas desenvolvidas são inseridos.
- Scene Builder: representa a sua parte gráfica e todo o *design* associado ao *software*.

Ao longo deste capítulo são explicitadas as duas plataformas utilizadas bem como as modificações feitas no *software* com vista a colmatar alguns dos problemas ao mesmo associados.

5.1 ECLIPSE E SCENE BUILDER

5.1.1 ECLIPSE

O *Eclipse* é uma plataforma, originalmente criada pela *IBM*, composta por variadas Ferramentas de Desenvolvimento com o objetivo de implementação e desenvolvimento de *software*. É uma plataforma livre, ou seja, determinadas funcionalidades são disponibilizadas aos utilizadores, como a modificação do código e a redistribuição do *software* (Gallardo & Aniszczyk, 2012).

Baseia-se no padrão de arquitetura de *software MVC (Model View Controller)*, suporta várias linguagens de programação, no entanto, a usada foi a linguagem *Java*.

Java

O *Java* é uma linguagem orientada por objetos onde cada elemento no sistema é representado por um objeto com Atributos e agrupados em Classes. Este tipo de linguagem permite a reutilização do código criado, o que diminui o tempo de desenvolvimento e sobrecarrega menos o software (Arnold et al., 2013). Uma das grandes vantagens do *Java* é o facto de correr em qualquer em qualquer sistema operacional, uma das razões pelas quais é uma das linguagens mais utilizadas no mundo (Kruk, Alves, Molinari, & Roux, 2018).

MODEL VIEW CONTROLLER (MVC)

O *Eclipse* é um programa baseado no padrão de arquitetura de *software MVC (Model View Controller)* e está dividido em três camadas distintas: (i) *Model*, (ii) *View* e (iii) *Controller*:

- *Model* é o núcleo do programa, tudo o que envolve manipulação de dados, leitura, escrita e validação de dados. No caso do *software* em questão, será todo o input de dados relacionado com as cartas de controlo, sejam os parâmetros das cartas de controlo e as constantes.
- *View* é a camada de interação com o utilizador, que serve para exibir dados.
- *Controller* é o que faz a interação entre o *Model* e o utilizador. É responsável por interpretar as ações de entrada através do clique e teclado realizadas pelo utilizador.

A Figura 5.1 esquematiza o raciocínio descrito anteriormente.

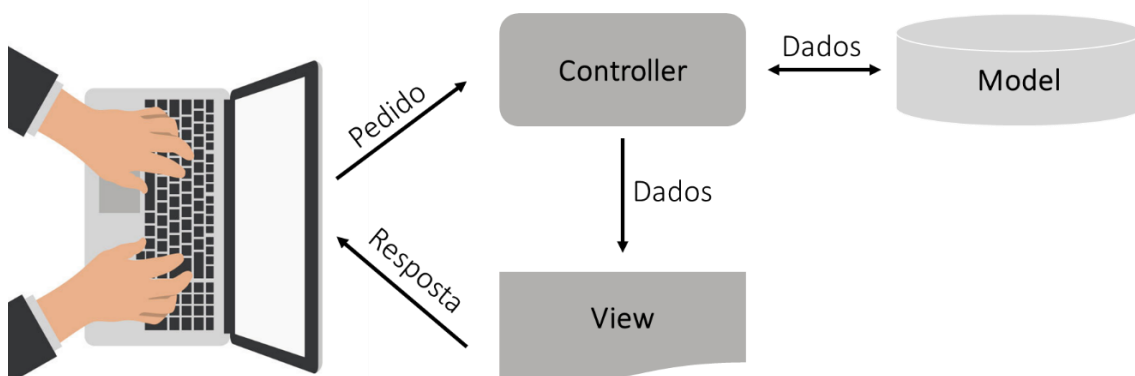


Figura 5.1: Raciocínio relativo ao padrão de arquitetura *MVC*

5.1.2 SCENE BUILDER

O *Scene Builder* pertence à *Gluon* e é uma plataforma usada para desenvolver o aspeto gráfico do *software*. Desde 2008 foi criado o *JavaFX*, pela *Oracle*, que é uma interface gráfica da linguagem *Java* (*GUI-Graphical User Interface*) que, aliada com a plataforma *Scene Builder*, permite criar as interfaces gráficas muito mais facilmente, simplificando o desenvolvimento gráfico do *software* e tornando mais acessível a sua manutenção. Isto é, ao invés de ser necessário escrever as linhas de código associado à interface gráfica, basta apenas usar o *Scene Builder* (Kruk et al., 2018). É uma plataforma muito acessível e de fácil utilização, que possui ferramentas visuais de arrastar e soltar no ecrã de modo a simplificar a criação do *software*.

5.2 MODIFICAÇÕES NO SOFTWARE

Neste subcapítulo são apresentadas todas as modificações efetuadas no *software* criado por Nogueira (2018). Algumas modificações foram feitas por razões de melhoria da sua componente visual enquanto outras resultaram da necessidade técnica do desenvolvimento do *software*.

5.2.1 NOME

O objetivo inicial do *software*, criado por Nogueira (2018), era de apenas contemplar os parâmetros obtidos das cartas de controlo especiais. Por essa razão, o *software* foi apelidado de CCE (Cartas de Controlo Especiais). No entanto, para além de possuir os parâmetros das cartas de controlo especiais, possuí também as constantes das cartas de controlo tradicionais e os valores crítico de $D_{crítico}$ do teste de Kolmogorov-Smirnov. Verificada esta factalidade e com consentimento do autor do *software*, Nogueira (2018), o nome do *software* foi alterado para FCC (Fatores das Cartas de Controlo).

5.2.2 DISPLAY E DESIGN

Algumas modificações foram feitas no display e no design do *software*. As cores de origem, em tons de cinzento e branco foram substituídas e os ecrãs de visualização foram modificados esteticamente. Na Figura 5.2 apresenta-se a autenticação e o menu principal logo após colocar a respetiva senha de acesso. Caso os botões do menu principal das Cartas de Controlo Tradicionais “MÉDIA E DISPERSÃO” e do teste de Kolmogorov-Smirnov “K-S” sejam acionados, originam as janelas apresentadas na Figura 5.3, respetivamente. Caso se acione os botões das

Cartas de Controlo Especiais “MÉDIA” ou “DISPERSÃO” surgem as janelas apresentadas na Figura 5.4.

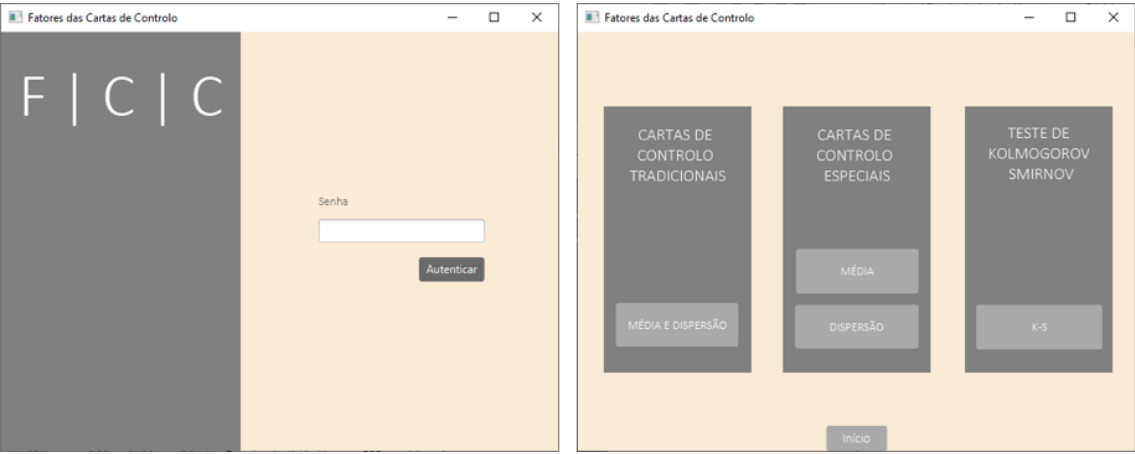


Figura 5.2: Autenticação e menu principal no *software FCC*



Figura 5.3: Cartas de Controlo Tradicionais e teste de K-S no *software FCC*



Figura 5.4: Cartas de Controlo Especiais para Controlo da Média e Dispersão no *software FCC*

5.2.3 NOVO BOTÃO PARA A CARTA $\overline{X}/LN(S^2)$

Fruto do trabalho desenvolvido no Capítulo 3, aquando da criação de uma nova carta de controlo $\overline{X}/LN(S^2)$, tornou-se necessário criar um novo botão para a nova carta desenvolvida. Este botão está inserido no separador “Cartas de Controlo Tradicionais” e não num separador novo.

Este botão irá permitir ao utilizador escolher a dimensão de amostra que pretende tratar, e o *software* irá expor as constantes de apoio à construção dos limites de controlo para a carta $\overline{X}/LN(S^2)$.

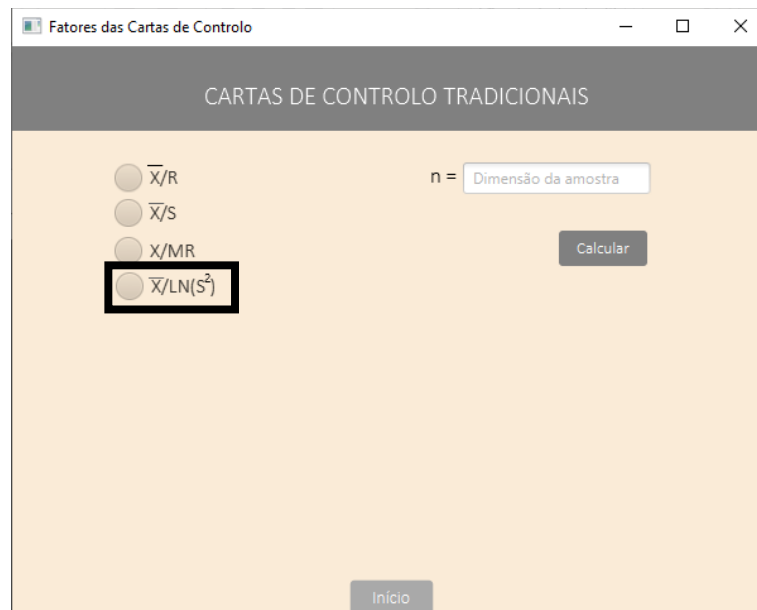


Figura 5.5: Novo botão do separador "Cartas de Controlo Tradicionais" no *software* FCC

6 CONCLUSÕES E SUGESTÕES DE MELHORIA

6.1 CONCLUSÕES GERAIS

A Estatística tem um papel fundamental no controlo dos processos, visa controlar as variações que ocorrem nos mesmos, identificando as suas causas. As cartas de controlo, tanto as tradicionais como as especiais, são uma ferramenta fundamental para esse controlo, permitindo a deteção de alterações dos parâmetros do processo produtivo e, por sua vez, melhorá-lo.

A presente dissertação foi desenvolvida por forma a colmatar algumas lacunas acerca da aplicação das cartas de controlo tradicionais e especiais, de modo a aprofundar o estudo de técnicas de simulação adequadas a problemas de controlo estatístico dos processos produtivos.

No âmbito das cartas de controlo de Shewhart, incidiu-se na verificação da Normalidade para o controlo da dispersão, usando o *software Matlab* e na proposta de uma nova carta $\ln(S^2)$.

A simulação em *Matlab* dos valores correspondentes à nova carta e às suas respetivas comparações (cartas R e S) traduziu-se num período de desenvolvimento de 3 meses (desde a obtenção das linhas de código correspondentes ao desejado bem como o tratamento de dados com apoio do *Excel*). A carta $\ln(S^2)$ foi desenvolvida com sucesso, contemplando todas as contantes que apoiam a sua construção bem como os limites de controlo correspondentes.

Em relação às cartas de controlo especiais, esta dissertação incidiu na determinação dos parâmetros da carta $CUSUM-\ln(S^2)$, com apoio do *software Matlab* para dimensão de amostras 4, 5, 6, 7 e 8, corrigindo os erros detetados e melhorando a gama de dados disponíveis para consulta, fornecendo uma alternativa válida aos desenvolvimentos apresentados por Chang e Gan (1995).

A determinação dos parâmetros desta carta traduziu-se num tempo de simulação de 4 meses, passando pelas 3 fases de simulação. A fase 1 e 3 demoraram aproximadamente 1 mês meio, sendo que a fase 2 foi mais curta, demorando 1 mês. O tratamento de dados após a obtenção dos parâmetros traduziu-se em gráficos com regressões polinomiais realizados em *Excel*, para que seja visualmente compreendido a olho nu o comportamento das curvas.

De acordo com a metodologia adotada na presente dissertação e, designadamente, pelo fato de a mesma assentar num universo de dados mais abrangente, apenas foi possível comparar os resultados obtidos com os autores de referência para a dimensão de amostra igual a 5, apresentado no ANEXO B. Tal comparação permite verificar que os resultados obtidos são bastante mais precisos do que os já obtidos por investigações anteriores da FCT/UNL e, assim,

concluir que o algoritmo está bem definido, o que valida os outros resultados para as diferentes dimensões de amostras simuladas.

A presente dissertação logrou proceder à melhoria do relevante *software* criado por Nogueira (2018), permitindo englobar, para além de todos os parâmetros obtidos anteriormente, todos os novos parâmetros obtidos na carta $CUSUM-In(S^2)$ bem como as novas constantes que apoiam a construção dos limites de controlo da nova carta desenvolvida, carta $In(S^2)$. Para além da melhoria do ponto de vista técnico-funcional (designadamente através da atualização da respetiva base de dados e da criação de um novo botão para a nova carta desenvolvida), o seu aspeto gráfico também foi modificado, melhorando a experiência do utilizador.

Em síntese, conclui-se que o trabalho desenvolvido culminou no enriquecimento do *software* FCC, melhorando a gama de dados para utilização académica e industrial e que os objetivos propostos inicialmente foram alcançados com sucesso.

6.2 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

O estudo inerente à obtenção dos parâmetros que apoiam a construção das cartas de $CUSUM-In(S^2)$ revela ainda ter um enorme potencial para expansão. O estudo de outros valores de ARL_{EC} e de outras dimensões de amostra que não foram analisados na presente dissertação é uma das áreas a explorar.

A expansão do *software* desenvolvido com outras cartas já estudadas por outros autores, tanto cartas tradicionais, como cartas especiais ($CUSUM-FIR$ e $FIRCUSUM-In(S^2)$), com o intuito de tornar o FCC um *software* o mais completo possível para que possa ser utilizado em contexto industrial e académico, é um dos desafios que se considera útil neste contexto.

O esforço computacional inerente à criação destes ábacos e tabelas traduziu-se num período de 4 meses de computação com dois computadores, pelo que é aconselhável a utilização de pelo menos dois computadores para a sua realização.

Aquando da fase 2, o erro utilizado para encontrar os valores de h_C em função de k_C que produzem os ARL_{EC} desejados pode diminuir (deixando de ser $\varepsilon = 2$), no entanto, iria obrigar a um esforço computacional substancialmente superior ao evidenciado neste trabalho o que poderia ser um entrave à conclusão com sucesso da presente dissertação.

BIBLIOGRAFIA

- Afonso, R. (2012). *Determinação de parâmetros da carta de controlo CUSUM-In(S2) através de ferramenta computacional de suporte ao controlo estatístico*. Faculdade de Ciências e Tecnologias da Universidade Nova de Lisboa.
- António, N., Teixeira, A., & Rosa, Á. (2019). *Gestão da Qualidade - de Deming ao modelo de excelência da EFQM* (3ª Edição). Edições Sílabo.
- Arnold, K., Gosling, J., & Holmes, D. (2013). The Java programming language. Em *Journal of Chemical Information and Modeling* (Vol. 53). <https://doi.org/10.1017/CBO9781107415324.004>
- Bisgaard, S. (2007). Quality Management and Juran's Legacy. *Wiley InterScience*, 365–377.
- Brooks, D., & Evans, D. A. (1972). An approach to the probability of cusum run length. *Biometrika*, 59, 539–549.
- Cardoso, R. B. (2016). *Determinação de parâmetros das cartas de controlo CUSUM e CUSUM-In(S2) com recurso a ferramentas computacionais*.
- Chan, L. K., Cheng, S. W., & Spiring, F. A. (1988). A New Measure of Process Capability: Cpm. *Journal of Quality Technology*, 20, 162–175.
- Chang, T. C., & Gan, F. F. (1995). A Cumulative Sum Control Chart for Monitoring Process Variance. *Journal of Quality Technology*, 27.
- Crowder, S. V. (1989). Design of Exponentially Weighted Moving Averages Schemes. *Journal of Quality Technology*, 21, 155–162.
- Crowder, S. V., & Hamilton, M. D. (2018). An EWMA for Monitoring a Process Standard Deviation. *Journal of Quality Technology*, 24, 12–21.
- Gallardo, D., & Aniszczuk, C. (2012). *Introdução à Plataforma Eclipse*. 1–11.
- Gan, F. F. (1991). An Optimal Design of CUSUM Quality Control Charts. *Journal of Quality Technology*, 23, 279–286.
- Hawkins, D. M. (1992). A Fast Accurate Approximation for Average Run Lengths of CUSUM Control Charts. *Journal of Quality Technology*, 24.
- Hsiang, T. C., & Taguchi, G. (1985). A Tutorial on Quality Control and Assurance- The Taguchi Methods. Em *ASA Annual Meeting*. Las Vegas, NV.
- Jones-Farmer, L. A., Woodall, W. H., Steiner, S. H., & Champ, C. W. (2014). An overview of Phase I analysis for process improvement and monitoring. *Journal of Quality Technology*, 46, 265–280.
- Juran, J. M. (1999). *Juran's Quality Handbook* (5ª). New York, USA: McGraw-Hill.

- Kane, V. E. (1986). Process Capability Indices. *Journal of Quality Technology*, 18, 1–212.
- Kruk, G., Alves, O., Molinari, L., & Roux, E. (2018). Best practices for efficient development of JavaFX applications. *JACoW Publishing*, 1078–1083.
- Lucas, J. M. (1985). Cumulative sum (CUSUM) control schemes. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, 14, 2689–2704.
- Montgomery, D. C. (2012). *Introduction to Statistical Quality Control* (7ª Edição).
- Montgomery, D. C., & Runger, G. C. (2013). *Applied Statistics and Probability for Engineers* (6ª Edição). New.
- Nogueira, J. (2018). *Determinação de Parâmetros das Cartas CUSUM-In(S^2) e EWMA-In(S^2) e Desenvolvimento de Software de Apoio ao Controlo Estatístico do Processo*. Faculdade de Ciências e Tecnologias da Universidade Nova de Lisboa.
- Oakland, J. (2008). Statistical Process Control. Em *Routledge* (6ª Edição). <https://doi.org/10.1192/bjp.112.483.211-a>
- Pearn, W. L., Kotz, S., & Johnson, N. L. (1992). Distributional and Inferential Properties of Process Capability Indices. *Journal of Quality Technology*, 24, 216–231.
- Pereira, Z. L., & Requeijo, J. G. (2012). Qualidade: Planeamento e Controlo Estatístico de Processos. Em *Faculdade de Ciências e Tecnologia - Universidade Nova de Lisboa*.
- Shewhart, W. A. (1931). *Economic Control of Quality of Manufactured Product*. New York, USA: D. Van Nostrand Company, Inc.
- Siegmund, D. (1985). *Sequential Analysis Tests and Confidence Intervals*. Springer-Verlag New York.
- Tsutsui, W. (1996). W. Edwards Deming and the Origins of Quality Control in Japan. *The Journal of Japanese Studies*, 22, 295–325.
- Vance, L. C. (1986). Average Run Lengths of Cumulative Sum Control Charts for Controlling Normal Means. *Journal of Quality Technology*, 18, 189–193.
- Woodal, W. H. (1986). The Design of CUSUM Quality Control Charts. *Journal of Quality Technology*, 18, 99–102.
- Woodall, W. H. (2000). Controversies and Contradictions in Statistical Process Control. *Journal of Quality Technology*, 32, 341–350.
- Woodall, W. H., & Adams, B. M. (1993). The statistical design of cusum charts. *Quality Engineering*, 5, 559–570.

ANEXOS

ANEXO A - Coeficientes das cartas Tradicionais de Variáveis

Tabela A.1: Fatores das cartas de controle de variáveis

Fatores para construção das cartas de controle de variáveis

Carta da Média					Carta do Desvio Padrão					Carta da Amplitude							
Dimensão Amostra	Fatores Limites de Controle				Fatores Linha Central				Fatores para Limites de Controle				Fatores para Limites de Controle				
n	A	A ₂	A ₃	A ₄	d ₁	d ₂	B ₁	B ₂	B ₃	B ₄	B ₅	B ₆	d ₃	D ₁	D ₂	D ₃	D ₄
2	2,121	1,881	2,639		1,128	0,7979	0	3,267	0	2,666	0	2,666	0,833	0	3,686	0	3,267
3	1,732	1,023	1,934		1,693	0,8862	0	2,568	0	2,276	0	2,276	0,888	0	4,358	0	2,574
4	1,500	0,729	1,628		2,039	0,9213	0	2,266	0	2,088	0	2,088	0,890	0	4,698	0	2,282
5	1,342	0,577	1,427		2,326	0,9400	0	2,089	0	1,964	0	1,964	0,864	0	4,918	0	2,114
6	1,225	0,483	1,287		2,534	0,9515	0,030	1,970	0,029	1,874	0,029	1,874	0,848	0	5,078	0	2,004
7	1,134	0,419	1,182		2,704	0,9594	0,118	1,982	0,113	1,806	0,113	1,806	0,833	0,204	5,204	0,076	1,924
8	1,061	0,373	1,099		2,847	0,9630	0,185	1,815	0,179	1,751	0,179	1,751	0,820	0,388	5,306	0,136	1,864
9	1,000	0,337	1,032		2,970	0,9693	0,239	1,761	0,232	1,707	0,232	1,707	0,808	0,547	5,393	0,184	1,816
10	0,949	0,308	0,975		3,078	0,9727	0,284	1,716	0,276	1,669	0,276	1,669	0,797	0,687	5,469	0,223	1,777
11	0,905	0,285	0,927		3,173	0,9754	0,321	1,679	0,313	1,637	0,313	1,637	0,787	0,811	5,535	0,256	1,744
12	0,866	0,266	0,886		3,258	0,9776	0,354	1,646	0,346	1,610	0,346	1,610	0,778	0,922	5,594	0,283	1,717
13	0,832	0,249	0,850		3,336	0,9794	0,382	1,618	0,374	1,585	0,374	1,585	0,770	1,025	5,647	0,307	1,693
14	0,802	0,235	0,817		3,407	0,9810	0,406	1,594	0,399	1,563	0,399	1,563	0,763	1,118	5,696	0,328	1,672
15	0,775	0,223	0,789		3,472	0,9823	0,428	1,572	0,421	1,544	0,421	1,544	0,756	1,203	5,741	0,347	1,653
16	0,750	0,212	0,763		3,532	0,9835	0,448	1,552	0,440	1,526	0,440	1,526	0,750	1,282	5,782	0,363	1,637
17	0,728	0,203	0,739		3,588	0,9845	0,466	1,534	0,458	1,511	0,458	1,511	0,744	1,356	5,820	0,378	1,622
18	0,707	0,194	0,718		3,640	0,9854	0,482	1,518	0,475	1,496	0,475	1,496	0,739	1,424	5,856	0,391	1,608
19	0,688	0,187	0,698		3,689	0,9862	0,497	1,503	0,490	1,483	0,490	1,483	0,734	1,487	5,891	0,403	1,597
20	0,671	0,180	0,680		3,735	0,9869	0,510	1,490	0,504	1,470	0,504	1,470	0,729	1,549	5,921	0,415	1,585
21	0,655	0,173	0,663		3,778	0,9876	0,523	1,477	0,516	1,459	0,516	1,459	0,724	1,605	5,951	0,425	1,575
22	0,640	0,167	0,647		3,819	0,9882	0,534	1,466	0,528	1,448	0,528	1,448	0,720	1,659	5,979	0,434	1,566
23	0,626	0,162	0,633		3,858	0,9887	0,545	1,455	0,539	1,438	0,539	1,438	0,716	1,710	6,006	0,443	1,557
24	0,612	0,157	0,619		3,895	0,9892	0,555	1,445	0,549	1,429	0,549	1,429	0,712	1,759	6,031	0,451	1,548
25	0,600	0,153	0,606		3,931	0,9896	0,565	1,435	0,559	1,420	0,559	1,420	0,708	1,806	6,056	0,459	1,541

Para $n > 25$

$$A = \frac{3}{\sqrt{n}} \quad A_5 = \frac{3}{c_4 \sqrt{n}} \quad c_4 = \frac{4(n-1)}{4n-3} \quad B_3 = 1 - \frac{3\sqrt{1-c_4^2}}{c_4} \quad B_4 = 1 + \frac{3\sqrt{1-c_4^2}}{c_4} \quad B_5 = c_4 - 3\sqrt{1-c_4^2} \quad B_6 = c_4 + 3\sqrt{1-c_4^2}$$

ANEXO B - Ábacos de Referência das cartas *CUSUM* para controlo da dispersão

Tabela B.1: Parâmetros (k_C , h_C), ARL_1 e ARL_2 da carta *CUSUM-In*(S^2), para detetar um aumento da variância do processo

n	σ_1/σ_0	ARL_0			
		100	200	500	1000
2	1,20	(0,648; 1,466) 28,8; 3,5	(0,761; 1,538) 46,1; 4,0	(0,900; 1,597) 85,6; 4,7	(-0,900; 21,33) 120,6; 15,7
	1,60	(0,763; 1,283) 8,6; 2,4	(0,855; 1,381) 11,1; 2,6	(0,972; 1,471) 15,7; 2,9	(1,057; 1,517) 20,2; 3,2
	2,20	(0,912; 1,073) 4,0; 1,8	(0,987; 1,185) 4,6; 1,9	(1,085; 1,294) 5,6; 2,1	(1,158; 1,354) 6,5; 2,2
	3,00	(1,059; 0,887) 2,5; 1,5	(1,121; 1,009) 2,8; 1,6	(1,204; 1,130) 3,1; 1,6	(1,268; 1,197) 3,4; 1,7
3	1,20	(0,350; 1,601) 20,7; 2,4	(-0,026; 3,771) 30,1; 3,7	(-0,213; 7,103) 45,5; 7,4	(-0,277; 9,860) 58,8; 7,4
	1,60	(0,589; 1,099) 5,4; 1,6	(0,632; 1,236) 6,6; 1,7	(0,679; 1,409) 8,7; 1,9	(0,676; 1,620) 10,6; 2,1
	2,20	(0,788; 0,805) 2,5; 1,3	(0,826; 0,925) 2,8; 1,3	(0,879; 1,052) 3,2; 1,4	(0,919; 1,131) 3,6; 1,4
	3,00	(0,964; 0,590) 1,7; 1,1	(0,995; 0,708) 1,8; 1,2	(1,039; 0,834) 1,9; 1,2	(1,074; 0,911) 2,1; 1,2
5	1,20	(0,126; 1,863) 13,5; 2,0	(0,068; 2,657) 18,1; 2,5	(0,011; 3,961) 24,9; 3,3	(-0,014; 5,013) 30,4; 4,0
	1,60	(0,502; 0,808) 3,3; 1,2	(0,521; 0,938) 3,9; 1,2	(0,541; 1,106) 4,8; 1,3	(0,539; 1,270) 5,5; 1,4
	2,20	(0,725; 0,502) 1,6; 1,1	(0,744; 0,605) 1,8; 1,1	(0,770; 0,722) 2,0; 1,1	(0,792; 0,797) 2,1; 1,1
	3,00	(0,919; 0,286) 1,2; 1,0	(0,932; 0,389) 1,2; 1,0	(0,952; 0,504) 1,3; 1,0	(0,969; 0,577) 1,4; 1,0
10	1,20	(0,170; 1,093) 7,9; 1,2	(0,144; 1,464) 9,9; 1,5	(0,126; 1,957) 12,7; 1,9	(0,114; 2,371) 15,0; 2,1
	1,60	(0,458; 0,480) 1,9; 1,0	(0,468; 0,549) 2,2; 1,0	(0,482; 0,656) 2,5; 1,0	(0,492; 0,731) 2,8; 1,0
	2,20	(0,692; 0,189) 1,1; 1,0	(0,700; 0,269) 1,2; 1,0	(0,710; 0,362) 1,2; 1,0	(0,718; 0,424) 1,3; 1,0
	3,00	(0,800; 0,079) 1,0; 1,0	(0,800; 0,165) 1,0; 1,0	(0,800; 0,266) 1,0; 1,0	(0,800; 0,335) 1,0; 1,0
20	1,20	(0,186; 0,615) 4,7; 1,0	(0,178; 0,774) 5,7; 1,0	(0,166; 1,015) 7,0; 1,1	(0,162; 1,187) 8,0; 1,1
	1,60	(0,440; 0,211) 1,3; 1,0	(0,444; 0,275) 1,4; 1,0	(0,452; 0,348) 1,5; 1,0	(0,458; 0,398) 1,6; 1,0
	2,20	(0,640; 0,004) 1,0; 1,0	(0,640; 0,069) 1,0; 1,0	(0,640; 0,145) 1,0; 1,0	(0,640; 0,197) 1,0; 1,0
	3,00	(0,640; 0,004) 1,0; 1,0	(0,640; 0,069) 1,0; 1,0	(0,640; 0,145) 1,0; 1,0	(0,640; 0,197) 1,0; 1,0

Nota: A leitura do Tabela é feita da forma seguinte, tendo por base os primeiros valores no canto superior esquerdo, que correspondem a $ARL_0=100$ ($ARL_{Em\ Controlo}=100$):

(0,648; 1,466)
28,8; 3,5

- $k_A = 0,648$
- $h_A = 1,466$
- 28,8 é o $ARL_{Fora\ de\ Controlo}$ para um aumento do desvio padrão de σ_1/σ_0
- 3,5 é o $ARL_{Fora\ de\ Controlo}$ para um aumento do desvio padrão de $2\sigma_1/\sigma_0$

Tabela B.2: Parâmetros (kC , hC), ARL_1 e ARL_2 da carta $CUSUM-\ln(S^2)$, para detetar um decréscimo da variância do processo

n	σ_1/σ_0	ARL_0			
		100	200	500	1000
2	0,80	(1,400 ; 16,167)	(1,400 ; 22,531)	(1,400 ; 33,131)	(1,426 ; 40,163)
		40,0 ; 10,6	59,3 ; 14,3	92,4 ; 20,6	122,4 ; 25,1
	0,60	(1,470 ; 14,958)	(1,540 ; 18,704)	(1,600 ; 23,966)	(1,628 ; 28,212)
		19,0 ; 7,7	25,4 ; 9,7	34,9 ; 12,5	42,5 ; 14,8
	0,40	(1,714 ; 12,059)	(1,786 ; 14,855)	(1,850 ; 18,697)	(1,882 ; 21,693)
		9,9 ; 5,2	12,5 ; 6,3	16,1 ; 7,9	19,0 ; 9,2
	0,20	(2,122 ; 9,451)	(2,186 ; 11,645)	(2,246 ; 14,618)	(2,278 ; 16,904)
		4,9 ; 3,2	6,0 ; 3,8	7,5 ; 4,7	8,6 ; 5,4
	0,80	(0,672 ; 8,951)	(0,704 ; 11,361)	(0,732 ; 14,797)	(0,746 ; 17,525)
		24,5 ; 5,9	33,7 ; 7,4	47,9 ; 9,6	59,7 ; 11,3
3	0,60	(0,862 ; 6,564)	(0,898 ; 8,060)	(0,930 ; 10,114)	(0,946 ; 11,712)
		9,9 ; 3,8	12,5 ; 4,5	16,1 ; 5,6	18,9 ; 6,4
	0,40	(1,122 ; 4,980)	(1,154 ; 6,103)	(1,184 ; 7,623)	(1,200 ; 8,791)
		4,8 ; 2,5	5,8 ; 2,9	7,1 ; 3,5	8,2 ; 4,0
	0,20	(1,662 ; 3,444)	(1,634 ; 4,421)	(1,626 ; 5,684)	(1,624 ; 6,641)
		2,3 ; 1,5	2,7 ; 1,8	3,3 ; 2,2	3,7 ; 2,4
	0,80	(0,406 ; 4,457)	(0,426 ; 5,492)	(0,442 ; 6,957)	(0,450 ; 8,103)
		14,6 ; 3,2	19,0 ; 3,9	25,2 ; 4,8	30,1 ; 5,5
	0,60	(0,612 ; 2,965)	(0,630 ; 3,607)	(0,646 ; 4,478)	(0,654 ; 5,151)
		5,3 ; 2,0	5,3 ; 2,0	7,9 ; 2,8	9,0 ; 3,1
5	0,40	(0,936 ; 1,989)	(0,926 ; 2,511)	(0,926 ; 3,182)	(0,928 ; 3,688)
		2,4 ; 1,3	2,9 ; 1,5	3,4 ; 1,8	3,9 ; 2,0
	0,20	(1,958 ; 0,651)	(1,884 ; 1,102)	(1,738 ; 1,761)	(1,604 ; 2,308)
		1,1 ; 1,0	1,3 ; 1,0	1,6 ; 1,0	1,8 ; 1,1
	0,80	(0,280 ; 2,022)	(0,290 ; 2,457)	(0,298 ; 3,058)	(0,302 ; 3,524)
		7,9 ; 1,8	9,8 ; 2,0	12,3 ; 2,4	14,3 ; 2,7
	0,60	(0,518 ; 1,152)	(0,516 ; 1,429)	(0,520 ; 1,781)	(0,522 ; 2,050)
		2,6 ; 1,0	3,1 ; 1,1	3,6 ; 1,3	4,1 ; 1,6
	0,40	(1,028 ; 0,443)	(1,004 ; 0,663)	(0,962 ; 0,964)	(0,924 ; 1,201)
		1,2 ; 1,0	1,3 ; 1,0	1,6 ; 1,0	1,8 ; 1,0
10	0,20	(1,450 ; 0,011)	(1,450 ; 0,197)	(1,450 ; 0,435)	(1,450 ; 0,610)
		1,0 ; 1,0	1,0 ; 1,0	1,0 ; 1,0	1,0 ; 1,0
	0,80	(0,236 ; 0,969)	(0,240 ; 1,175)	(0,245 ; 1,447)	(0,248 ; 1,652)
		4,5 ; 1,0	5,3 ; 1,1	6,5 ; 1,3	7,4 ; 1,5
	0,60	(0,538 ; 0,394)	(0,528 ; 0,527)	(0,513 ; 0,704)	(0,502 ; 0,839)
		1,4 ; 1,0	1,6 ; 1,0	1,9 ; 1,0	2,1 ; 1,0
	0,40	(0,900 ; 0,012)	(0,900 ; 0,121)	(0,900 ; 0,259)	(0,900 ; 0,359)
		1,0 ; 1,0	1,0 ; 1,0	1,0 ; 1,0	1,0 ; 1,0
	0,20	(0,900 ; 0,012)	(0,900 ; 0,121)	(0,900 ; 0,259)	(0,900 ; 0,359)
		1,0 ; 1,0	1,0 ; 1,0	1,0 ; 1,0	1,0 ; 1,0
20	0,80	(0,236 ; 0,969)	(0,240 ; 1,175)	(0,245 ; 1,447)	(0,248 ; 1,652)
		4,5 ; 1,0	5,3 ; 1,1	6,5 ; 1,3	7,4 ; 1,5
	0,60	(0,538 ; 0,394)	(0,528 ; 0,527)	(0,513 ; 0,704)	(0,502 ; 0,839)
		1,4 ; 1,0	1,6 ; 1,0	1,9 ; 1,0	2,1 ; 1,0
	0,40	(0,900 ; 0,012)	(0,900 ; 0,121)	(0,900 ; 0,259)	(0,900 ; 0,359)
		1,0 ; 1,0	1,0 ; 1,0	1,0 ; 1,0	1,0 ; 1,0
	0,20	(0,900 ; 0,012)	(0,900 ; 0,121)	(0,900 ; 0,259)	(0,900 ; 0,359)
		1,0 ; 1,0	1,0 ; 1,0	1,0 ; 1,0	1,0 ; 1,0
	0,80	(0,236 ; 0,969)	(0,240 ; 1,175)	(0,245 ; 1,447)	(0,248 ; 1,652)
		4,5 ; 1,0	5,3 ; 1,1	6,5 ; 1,3	7,4 ; 1,5